当代经济学教科书译丛

• MARTIN J. OSBORNE
• ARIEL RUBINSTEIN

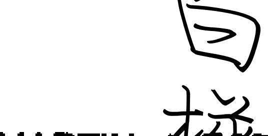
A COURSE IN GAME THEORY

博弈论教程

〔加〕马丁J. 奥斯本 〔美〕阿里尔·鲁宾斯坦 著
魏玉根 译 高峰 校

当代经济学教科书译丛



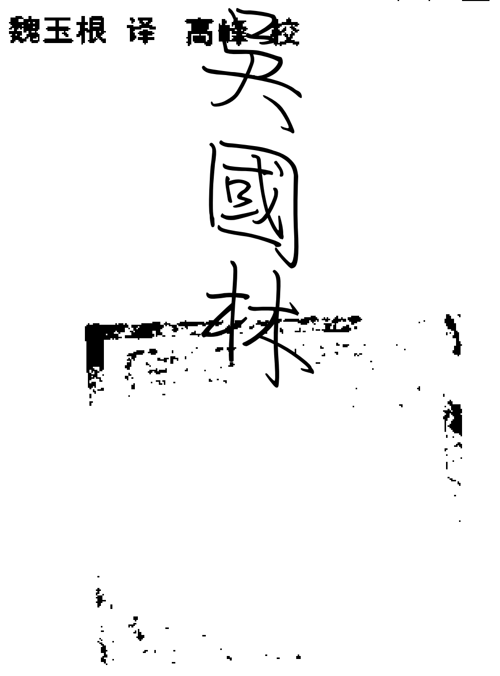


• MARTIN J. OSBORNE
• ARIEL RUBINSTEIN

A COURSE IN GAME THEORY

博弈论教程

〔加〕马丁J．奥斯本 〔美〕阿里尔·鲁宾斯坦 著
魏玉根 译 高峰 校



中国社会科学出版社

序 言

最近20年来,中国经历了剧烈的社会和经济变迁,而且可以预期,还会沿着邓小平理论指引的方向继续前进。这种变迁呼唤着适当的经济理论来提供某种指导——中国的发展和改革需要经济学理论的创新。在创新过程中,无疑需要借鉴西方经济学。同样,西方经济学的发展也越来越需要更为广阔的经济视野,需要从更为多样化的经济实践中汲取营养。于是,西方经济学界越来越多的有识之士把目光转向了原来实行计划经济的国家,这些国家的苦恼、阵痛、期望和奋斗历程都可能成为经济学进一步发展的契机,都可能为经济学的发展提供新的素材、新的视角、新的思路、新的方法。而在原计划经济国家中,中国是惟一保持转轨与发展并行不悖的国家。这使东西方的许多经济学家感到振奋。

为了深化我们对中国经济及其改革过程的理解,从而为我国的经济建设提供切实可行的指导,为经济学的发展提供新的素材和新的视角,加强中国与西方经济学的交流和沟通就成为必不可少的了。为此,北京大学和斯坦福大学两个经济学院系的有关教学和研究人员准备全面系统地向中国介绍西方经济学的最新研究成果和研究方法,主要是把西方一流经济学院系正在使用的最新、最好的经济学教材译介到中国来。

这套丛书有如下特点。第一,层次高。本丛书所选书目均为中高级教材。第二,内容新。所选书目均为美国最近几年出版的教材,体现了西方经济学的最新研究成果与水准。第三,题材广泛且具有系统性。大凡当代经济学的各个领域,从基础理论到各专门学科,从理论、历史到方法,本译丛均有涉及。第四,选材权威。本译丛所选书目均经北京大学和斯坦福大学有关经济学家严格挑选,都是美国经济学教材中的优秀之作,均出自美国著名经济学家之手,并在美国名牌大学经济学系广为使用。

这套《当代经济学教科书译丛》包括高级和中级两个系列。高级系列覆盖了西方经济学的各个基础领域,包括宏观经济学、微观经济学、经济计量学、对策论、经济史和经济思想史等,入选各书均为目前西方一流经济学院

系所用的最新最好的研究生教材。我们希望这套书能对读者了解当代西方经济学的现状和未来发展方向有所帮助，也希望对理解中国经济、从而为中国的经济改革有所裨益。

前　　言

本书提供了博弈论的一些主要思想。它是作为一个学期的研究生课程的教材来设计的，该课程约需 42 学时的面授。

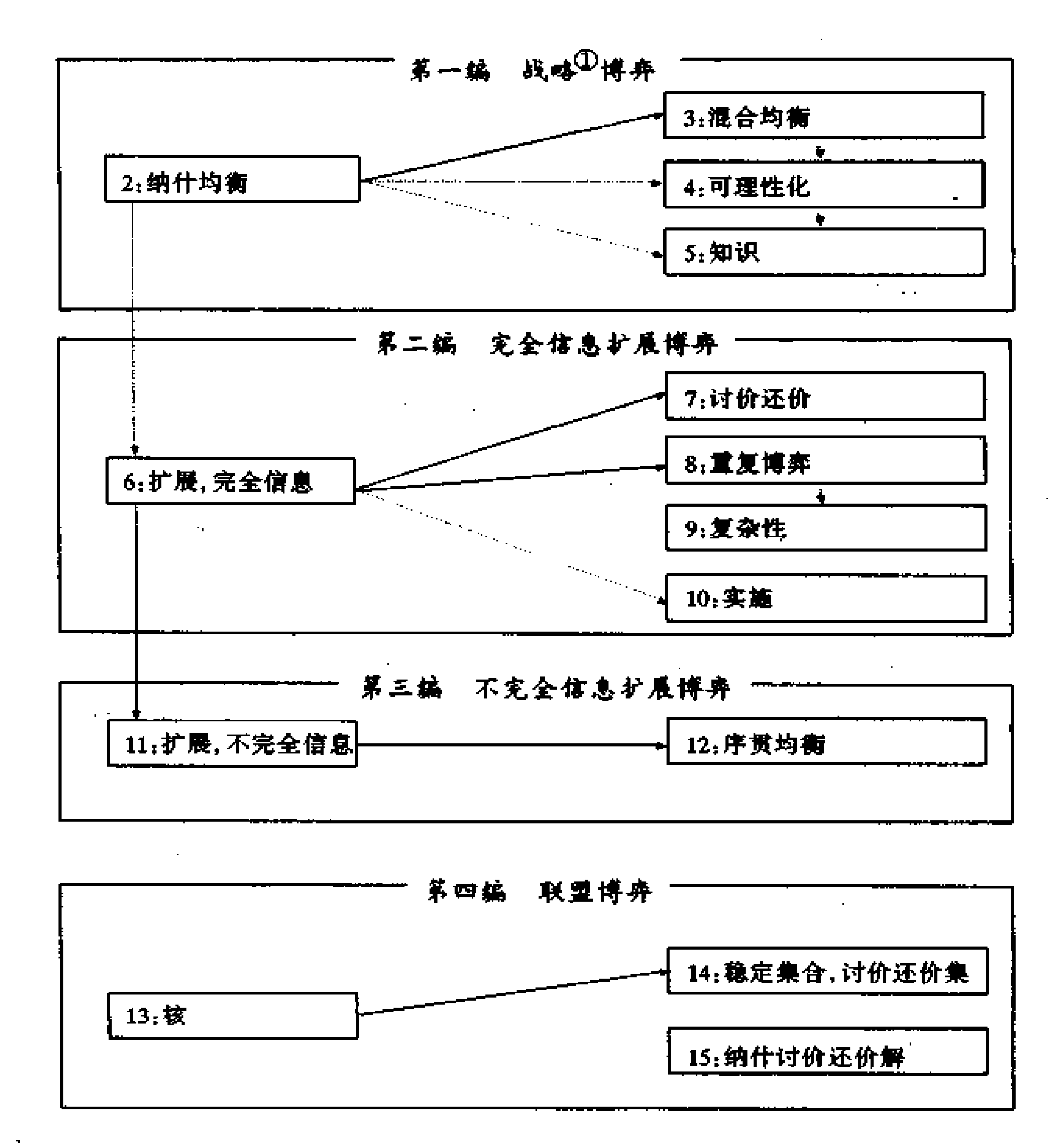
本书所涵盖的问题是那些我们个人认为在这样一个学期的课程中所应包括的内容。我们并不想提供一本关于博弈论的全面参考书，读者也无须将我们未涵盖的主题视为不重要。因此，我们的选择不可避免地反映了自身的偏好和兴趣。(若我们现在动手写这样一本书，则我们可能会增加两章，一章是关于实验博弈论的，另一章是关于学习和演进的。)

书中侧重理论的依据和主要概念的解释。我们的方式是给出精确定义及结论的完整证明，有时为了尽可能容易地达到这些目的而不惜牺牲一般性及限制材料的范围。

我们尽了极大努力去认证所有的概念、结论、例子和练习(参看每章后的“注解”)。我们对可能出现的失误深表歉意，并希望读者能指出这些错误以引起我们的注意。

本书结构

本书包括四部分，在每一部分我们都研究一组相关模型。第 2 页的图表明了各章间的关系。如果作为一个基本教程来看待的话，实际上只需要包括第 2、3、6、11、12、13 章。



各章间的主要关系。各章标题所在的方框大小与各章的篇幅成比例。与两个方框相连的实线箭头表示后一章依赖前一章;虚线箭头表示仅是后一章的主要思想应用于前一章。一个基本教程可包括重线方框中的六章。

① 原书作者认为 strategy 在本书宜翻译为"策略"而非"战略"。译者的这一译法仅供参考。——译者

练习

很多练习都是富有挑战性的;我们经常用练习去陈述次要结论。教师可以给出附加的、较直接的问题,调整练习的水平(通过暗示)以适应于学生的具体需要。练习的答案在本书提供的互联网网址上(参见第5页后)。

作者间的分歧

由不同作者合写的书并非就只能反映一个统一的观点。在某些方面,如同下列的注解,我们会简要地讨论我们之间存在的分歧。

关于人称的注解

我们对如何处理英语第三人称单数有分歧。

AR认为,我们应使用一个"中性"代词并赞成用"他",这样能使人明白这是既指男人又指女人。频繁地提醒他/她问题只会转移读者在主要问题上的注意力。语言对形成思想是很重要的,但在叙述材料中过分突出则是无益的,就如同在某些圈子里一样。

MJO认为没有"中性"的语言。特别是有许多例子,不管是从实际还是从语言运用的分析来看,"他"并不总是被感觉为包括男性和女性的。引用《美国遗产词典》(第三版,第831页):"这样他并不是一个中性的;而是指这样一个男人,即他被当作由他祖先所涉及的群落成员的代表。传统的用法并非一个简单的语言习惯;它也表明了一个特别的思维方式。"进一步说,用"他"去指并非特定性别的单个人甚至不是自然而然的产物,而是作为一种制度被强加的。这个制度来源于18和19世纪,当时"他们"作为一个单数代词被广泛使用而困扰着语法学者。因为在语法学者看来,男人比女人更

重要，所以他们决定"他"应该被使用。"他"用于指全称个人，这样既有性别主义者态度方面的根源又助长了这些态度。对这个问题没有完美的答案，特别像在这样一本书中有这么多涉及全称个人之处。"他们"作为一个单数代词有很多好处，尽管它的运用会导致混乱（和来自编辑们的抱怨）。我的偏好是对所有个人都用"她"。显然这样使用不是中性主义者的，但在几个世纪"他"占据主导之后，近几十年来"她"的使用不是中性主义思维方式的做法。如果这样的使用使这些读者的注意力偏离于本书所讨论的内容，并且导致他们去思考语言运用中的性别主义（这个问题确实是至少与序贯均衡的细节一样重要的），那么将会获得社会福利的提高。（不管这本书能否被称为"学术材料"，我看没有理由说它的读者与任何其他材料的读者相比应该受到不同对待。）

总而言之，我们俩都强烈地感受到了这个问题，我们俩都认为我们已达成的妥协是不令人满意的。当涉及到具体某个人时，我们有时使用"他"，有时使用"她"。例如在两人博弈中，我们将参与人 1 作为女性，而将参与人 2 作为男性。对于全称个人，我们使用"他"。

致谢

这本书是我们将所教课程与很多朋友及同事讨论后的产物。第 1、8、9 章中的某些材料来自于 AR 的一本关于有限理性模型的书的部分摘要内容。

MJO 我有幸在斯坦福大学向 Rober Aumann、Sergiu Hart、Mordecai Rurz 及 Rober Wilson 学习博弈论。我非常高兴能有机会表达对他们的感谢。多年与 Jean-Pierre Benoît、Haruo Imai、Vijay Krishna 和 Carolyn Pitchik 的讨论增进了我对很多主题的了解。我是在对新西兰坎特伯雷大学经济系的访问中完成本书工作的；对于该系各位同仁的殷勤好客我深表谢意。我也非常感激加拿大社会科学与人类研究委员会和加拿大自然科学与工程研究委员会，在过去六年里，她们对我的博弈论研究给予了经济上的帮助。

AR 我曾在伦敦经济学院（1987 年和 1988 年）、希伯莱大学（1989 年）、特拉维夫大学（1990 年）及普林斯顿大学（1992 年）的教程里使用过本书部分内容。伦敦经济学院、普林斯顿大学和特拉维夫大学的殷勤好客与合作是非常值得怀念的。特别值得感谢的是我的朋友 Asher Wolinsky，我们之

间有过无数次富于启发性的谈话。本书的部分工作得到了美—以双边科学基金的支持(批准号 1011-341)。

我们要向 Pierpaolo Battigalli、Takako、Fujiwara、Wulong Gu、Abhinay Muthoo、Michele、Piccione 和 Doron Sonsino 致以谢意。他们对本书的提纲做了详细的评论,这些评论使我们真正地提高了教材的精确性与可读性。我们还要感谢 Dilip Abreu, Jean-Pierre Benoît, Larry Blume, In-koo Cho, Eddie Dekel, Faruk Gul, Vijay Krishna, Bart Lipman, Bentely MacLeod, Sylvain Sorin, Ran Spiegler 和 Arthur Sweetman 等对本书提出的建议和改进办法。最后,我们要感谢 Wulong Gu 和 Arthur Sweetman,在完成本书的过程中,他们给予了我们特别的帮助:Wulong 从事练习方面的工作,修改了我们的答案并提供了很多他自己的东西;Arthur 建立了本书的索引。

在技术方面我们感谢 Ed Sznyter 劝服一直倔强的 TEX 去执行我们的编号结构。

同 MIT 出版社 Terry Vaughn 打交道是件很愉快的事情;在该项目的初期阶段,他的鼓励对于促成我们完成本书是很重要的。

马丁 J·奥斯本

阿里尔·鲁宾斯坦

MARTIN J. OSBORNE
osborneomcaster.ca
Department of Economics, McMaster University
Hamilton, Canada, L8S 4M4

ARIEL RUBINSTEIN
rarieloccsg. tau. ac. il
Department of Economics, Tel Aviv University
Tel Aviv, Israel, 69978
Department of Economics, Princeton University
Princeton, NJ 08540, USA

我们为本书保留了一个网址。该地址联结由 MIT 出版社提供

http://mitpress. mit. edu/book-home. tcl? isbn = 026250401

我们地址的 URL 现在是

http://www. chass. utoronto. ca/~osborne/cgt

目　　录

第二编 完全信息扩展博弈

第三编 不完全信息扩展博弈

第四编 联盟博弈

第 1 章

绪　　论

1.1　博弈论

博弈论是一个分析工具包，它被设计用来帮助我们理解所观察到的决策主体相互作用时的现象。这种理论隐含的基本假设是：决策主体追求确定的外部目标（他们是理性的）并且考虑他们自身的知识或其他决策主体行为的期望（他们**推理具有战略性**）。

博弈论模型是对各种现实生活状况的高度抽象概括。这种抽象性使得它们可被用来研究范围很广的现象。例如，纳什均衡理论（见第 2 章）被用来研究寡头垄断和政治竞争，混和战略均衡（见第 3 章）被用来解释蜂舌长度和花粉管长度的分布状况；重复博弈论（见第 8 章）被用来阐述诸如威胁和承诺等社会现象；核理论（见第 13 章）则揭示了这样一种意义，即在包括多个代理人的经济里，某种价格系统下的交易结果是稳定的。

在博弈论中，纯理论与应用理论间的界限是模糊的，某些纯理论方面的发展是由应用方面的问题引起的。不过，我们相信这个界线依然存在。尽管我们希望这本书能引起那些应用者的兴趣，但本书似乎仅停留在“纯”理论的领域。将抽象模型应用于现实生活的艺术，该是另一部书的主题。

博弈论使用数学来正式地表达它的思想。然而，我们所讨论的博弈论思想却不是“生”来就带数学味的。从原理上讲，不使用数学，也完全可以写一本与该书内容基本相同的著作。数学形式使得精确地定义概念变得比较容易，可以验证思想的一致性，还可以探求假设的内涵。结果我们采取一种正式的风格，精确地表达定义和结论，并将概念的由来和解释贯穿其间。

数学模型的使用带来了独立的数学兴趣。但在本书中我们将博弈论视为社会科学而非数学的一个分支,其目的是去理解相互作用决策主体的行为。因此,本书并不侧重于数学方面的兴趣,从我们的观点看,数学结论只有被直觉认证后才是有趣的。

1.2 博弈和解

博弈是对战略相互作用的描述,它包括对参与人所能采取的行动的约束和参与人的兴趣,但不强调参与人实际采取的行动。解是对结果的系统描述,这种结果可能产生于一组博弈。博弈论给出各种博弈的合理解并且考察它们的性质。

我们研究四类博弈论模型,它们如本书的四部分标题所示:战略博弈(第一编),具有或不具有完全信息的扩展博弈(第二、三编)及联合博弈(第四编)。下面我们解释这样分类的一些依据。

1.2.1 非合作与合作博弈

在所有的博弈论模型中,基本的实体是**参与人**(player)。参与人可被解释为单个或一组作某项决策的人群。一旦定义了参与人集合,我们便可区分两类模型:一类是以单个参与人的可能行动集合为基本元素(见第一、二、三编);另一类是以参与人群的可能联合行动集合为基本元素(见第四编)。有时第一类模型被称为"非合作型",第二类模型被称为"合作型"(尽管这些术语并不能说清两类模型间的差异)。

从本书各章所占的篇幅上便可看出,近年来大部分研究集中于非合作博弈,但这并不能代表我们对这两个分支相对重要性的评价。我们尤其不同意某些作者的观点,在他们看来非合作博弈模型比合作模型更"基本"。我们认为两者不相上下。

3

1.2.2 战略博弈和扩展博弈

在第一编我们讨论战略博弈的概念,在第二、三编讨论扩展博弈的概念。战略博弈是这样一种情形的模型:每个参与人选择且仅选择一次行动

计划，并且所有参与人的决策是同时做出的（也就是说，在选择行动计划时每个参与人并不知道其他参与人的行动计划）。与此相反，扩展博弈模型则强调事件的可能顺序：每个参与人不仅可以在博弈开始时考虑自己的行动计划，并且在他不得不做决策的任何时候，也可以考虑他的行动计划。

1.2.3 完全与不完全信息博弈

我们所作的第二个区分是针对第二编和第三编中的模型的。在第二编的模型中参与人对任何其他人的行动都了解，而在第三编的模型中参与人就可能不太清楚别人的行动。前一模型有比较稳定的基础。后一模型在八十年代才开始兴起，我们对其不做重点介绍不是因为它们不切实际或不够重要，而是因为它们不太成熟。

1.3 博弈论和竞争均衡理论

为了近一步澄清博弈论的本质，现在将它与经济学中的竞争均衡理论作一比较。博弈论要考虑决策主体在做出决策前企图获得其他参与人的行为信息，而竞争理论给出的假定是：每个参与人只对某些环境参数感兴趣（例如价格），即使这些参数是被全体参与人的行为所决定的。

我们通过考虑下面一种情形来说明这两个理论的差异：在该情形中，每个参与人的某种行动（如钓鱼）的水准依赖于污染的程度，反过来污染程度又依赖于全体参与人的活动。若用竞争理论分析，我们便会去寻找一个与全体参与人行动相一致的污染程度，此时每个参与人都认为这个程度是给定的；若用博弈理论分析，我们则要求每个参与人的行动均为最优，此时每个参与人与其他参与人一起造成的污染预期是给定的。

1.4 理性行为

我们研究模型时，假定每个决策主体都是“理性的”，这种理性是建立在这样的意义之上的，即决策主体知道他的选择内容，对未知的事物形成预

期，具有明确的偏好，并在经过一些最优化过程后审慎选择他的行动。排除不确定性因素后下面的要素便组成了一个理性选择模型。

- 一个行动(action)集合 A，决策主体从 A 里做一个选择；
- 一个上述行为的可能结果(consequence)集合 C。
- 一个结果函数(consequence function) $g: A \to C$，g 使每个行动与一个结果相对应。
- 一个集合 C 上的偏好关系(preference relation) $\succsim$。(一个完全的，可传递性的，自反的和二元的关系。)

5 有时专门给定一个效用函数(utility function) $U: C \to \mathbb{R}$ 来表示决策主体偏好。效用函数确定了一个偏好关系 $\succsim$，$x \succsim y$，当且仅当 $U(x) \geqslant U(y)$。$\succsim$ 满足下列条件：

给定任何一个集合 $B \subseteq A$，A 为某个特别情形下的可能行动集合。一个理性决策主体选择一个可能行动 a^*($a^* \in B$)。若 a^* 对所有 $a \in B$ 满足 $g(a^*) \succsim g(a)$，则 a^* 为最优的。相应的它解决了问题 $\max_{a \in B} U(g(a))$。值得注意的是，使用这个决策模型要假定每个决策主体在从不同集合 B 选择时要使用同一个偏好关系。

在我们所研究的模型中，决策主体往往要在不确定条件下进行决策。参与人可能：

- 不能确定环境的客观参数；
- 对博弈中发生的事件不很清楚；
- 不能确定别的不确定参与人的行动；
- 不能确定别的参与人的推理。

为了对不确定情形下的决策建模，几乎所有的博弈论都使用了 von Neuman 和 Morgenstern(1944)及 Savage(1972)的理论。也就是，如果结果函数是随机的并被决策主体已知(即，对每一个 $a \in A$，结果 $g(a)$ 是集合 C 上的一个不确定事件)(概率分布)，那么决策主体就被认为是为了最大化一个函数期望值(v-N-M 效用)去行动，这个函数给每个结果赋一个值。如果行动与结果间的随机联系未给定，那么决策主体就被认为是好像按他心中的一个(主观的)概率分布去行动，这个分布决定了任何行动的结果。在这种情形下决策主体被认为将这样行动，即他心中有一人"状态空间"(state space) Ω，一个 Ω 上的概率测度，一个函数 $g: A \times \Omega \to C$，和一个效用函数 $u: C \to \mathbb{R}$；他被假定为考虑到概率测度去选择一个行动 a 来最大化期望值 $u(g(a, \omega))$。

我们不去讨论那些隐含在理性决策主体之下的种种假设。然而，需要指出的是，这些假定不断地受到实验心理学家的批评，他们经常提出一些其在应用时所需的严格限制条件。

1.5 稳定状态和推论的解释

对于战略和扩展博弈的解，有两种相互矛盾的解释。稳定状态(steady state)(或被 Binmore(1987/88)称之为演进(evolutive))解释，与经济学中的标准紧密相关。博弈论像其他学科一样处理具有规律性的东西。正如 Carnap(1966.p.3)所言："我们日常所见如同较系统的科学观察一样，揭示了世界上具有一定重复性或规律性的东西……科学规律仅是尽可能精确地对这种具有规律性的现象进行解释。"稳定状态解释将博弈作为这样一种模型，即它被设计用来解释一组相似状况中观察到的规律，每个参与人凭借长期实践获得的知识从而"知道"均衡并测试其行为的最优性。推论(deductive)(或者，被 Binmore 称之为演绎的(eductive))解释则将博弈视为孤立的，如同"一瞬间"的事情，并且试图推断理性强加于结果上的限制。它认为每个参与人都简单地从理性原则出发去推断其他参与人的行为。我们则力图避免这两种解释在博弈论中经常引起的混乱。

1.6 有限理性

6

当我们在现实生活中谈论博弈时，我们经常关心各参与人能力的非对称性。例如，某些参与人可能对状况有更清楚的洞察力或有更强的分析能力。这些现实生活中如此关键的差异却被博弈论现有的形式忽略了。

为了说明这个事实所造成的后果，让我们来考虑象棋游戏。在一场真实的象棋游戏中，参与人在他们有关符合规则的行动知识方面和在分析能力方面都可能有差异。然而，若用现代博弈论对象棋游戏建模，则会认为参与人具有的象棋规则知识是充分的，他们的分析能力也是理想的。我们在第2、6章证明的结果(见本书命题22.2和99.2)表明：对于"理性"参与人来说，象棋是一种平庸博弈。存在一个算法来"解"此博弈。该技术为两个

参与人各确定了一个战略，这样就有一个“均衡”结果，该结果的性质是无论其他参与人采用何种战略，只要参与人遵从他自己的战略，那么他的结果至少与均衡结果一样好。这个结果（最早由 Zermelo(1913)）表明象棋游戏是没有什么意思的，因为它仅有一个可能结果。然而尽管有这一结论，象棋仍是一种有趣的游戏。它的均衡结果仍有待计算，现在尚不可能采用 Zermelo 的算法。即使有朝一日可证明白方(the white)有一种取胜战略，而要一个人去实行它也可能是行不通的。由此抽象的象棋模型使我们推导出有关该博弈的一个重要事实，但同时又忽略了一场真实象棋游戏结果的最终决定因素：参与人的“能力”。

对不同参与人的能力及形势洞察力的不对称性建模在将来的研究中将是一个吸引人的挑战，对此“有限理性”模型已经开始发挥作用了。

1.7 术语和标记

我们假定读者对数学结果不很熟悉，但本书从头至尾都使用演绎推理。我们采取的标记和数学定义都是标准的，但为了避免混乱在这里列出一些。

7

我们用$\mathbb{R}$表示一个实数集合，$\mathbb{R}_+$表示非负实数集合。$\mathbb{R}^n$表示 n 维实数向量集合，$\mathbb{R}^n_+$表示 n 维非负实数向量集合。对于 $x\in\mathbb{R}^n$和$y\in\mathbb{R}^n$，我们用 $x\geqslant y$ 表示$x_i\geqslant y_i$，其中 $i=1,\cdots n$，用 $x>y$ 表示$x_i>y_i$，其中 $i=1,\cdots n$。我们说一个函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，是**递增**(increasing)的，假如每当 $x>y$ 时$f(x)\geqslant f(y)$，每当 $x>y$ 时$f(x)>f(y)$称为是**非递减**(nondecreasing)的。如果对所有 $x\in\mathbb{R}$，$x'\in\mathbb{R}$及 $\alpha\in[0,1]$，$f(\alpha x+(1-\alpha)x')\geqslant\alpha f(x)+(1-\alpha)f(x')$，则函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个凹函数。给定一个函数 $f:X\to\mathbb{R}$，我们用 $\arg\max_{x\in X}f(x)$表示 f 的最大值集合，对任何 $Y\subseteq X$，用 $f(Y)$表示集合$\{f(x):x\in Y\}$。

从始至终我们用 N 表示参与人集合。我们将某个变量的值的集合（每个参与人都对应一个）作为一个组合(profile)，用$(x_i)_{i\in N}$表示。或者，假如量词“$i\in N$”是确定的，则简单记为(x_i)。对任何一个组合 $x=(x_j)_{j\in N}$和任何$i\in N$，我们令 x_{-i}为除 i 以外所有参与人组合。给定列表 $x_{-i}=(x_j)_{j\in N\setminus\{i\}}$ 和一个元素 x_i，我们用(x_{-i},x_i)表示组合$(x_i)_{i\in N}$。如果对每个 $i\in N$，X_i 是一集合，则我们用 X_{-i}表示集合

$\times_{j\in N\setminus\{i\}}X_j$。

对于集合 A 上的二元关系 $\succsim$，如果对任何 $a\in A$ 和 $b\in A$，有 $a\succsim b$ 或 $b\succsim a$，则称为完备的；若对任一 $a\in A$，有 $a\succsim a$，则称为自反的；若对任何 $a\succsim b$，$b\succsim c$，有 $a\succsim c$，则称为传递的。一个偏好关系(preference. relation)是完备的、自反的、传递的、二元的。若 $a\succsim b$ 但没有 $b\succsim a$，那我们写成 $a\succ b$；若 $a\succsim b$ 且 $b\succsim a$，则我们写成 $a\sim b$。如果 A 中的任何序列 $(a^k)_k$ 和 $(b^k)_k$，对所有 k 有 $a^k\succsim b^k$，若 $(a^k)_k$ 和 $(b^k)_k$ 分别收敛到 a 和 b，仍有 $a\succsim b$，则我们说 A 上的偏好关系 $\succsim$ 是**连续的**。对于 $\mathbb{R}^n$ 上的偏好关系 $\succsim$，若对每一个 $b\in\mathbb{R}^n$，集合 $\{a\in\mathbb{R}^n: a\succsim b\}$ 是凸的，则 $\succsim$ 是**拟凹的**(quasi-concave)。若每个集合 $\{a\in\mathbb{R}^n: a\succsim b\}$ 是**严格凸的**，则 $\succsim$ 是**严格拟凹的**(Strictly quasi-concave)。

令 X 为一集合，我们用 $|X|$ 表示 X 中元素的个数。X 的分割(Partition)是 X 的非连通子集的一个集合。这些子集的和为 X。令 N 是一有限集合并令 $X\subseteq\mathbb{R}^N$ 为一集合，若对所有 $i\in N$，没有任何 $y\in X$ 满足 $y_i>x_i$，则 $x\in X$ 是帕累托有效的(Pareto efficient)。若对所有 $i\in N$，没有 $y\in X$ 满足 $y_i\geqslant x_i$ 及对某些 $i\in N$，有 $y_i>x_i$，则称 $x\in X$ **是严格帕累托有效的**(Strongly Pareto effcient)。

一个有限(或可数)集合 X 上的**概率测度**(Probability measure) μ 是一个可加函数，它将 X 的每一子集与一非负实数联系起来(即当 B 和 C 不相交时，有 $\mu(B\cup C)=\mu(B)+\mu(C)$ 并满足 $\mu(X)=1$。在某些情形下我们研究的概率测度所对应的集合并不一定是有限的。但如果你并不熟悉这种测度，则只要将注意力集中于有限情形即可。对于概率测度的更一般意义，请参看 Chung(1974, ch.2)。

[注解]

8

von Neumann 和 Morgenstern(1944)是博弈论方面的经典作家。Luce 和 Raiffa(1957)是一本早期的教科书，尽管现在已过时了，但它仍包含了该理论基本概念的上乘讨论。Schelling(1960)提供了该理论的一些主要思想的口头讨论。

很多最近出版的书都包含了本书大部分的内容，程度相近的书有：Shu-

bik(1982), Moulin(1986), Friedman(1990), Kreps(1990a, Part Ⅱ), Fudenberg and Tirole(1991a), Myerson(1991), van Damme(1991), 和 Binmore(1992)。Gibbons(1992)是一本更基本的入门书。

Aumann(1985b)包含了有关博弈论目标和成果的讨论, Aumann(1987b)从历史角度说明博弈论。Binmore(1987/88)针对博弈论稳定状态和推论解释两者间的差异进行了批判性的讨论。Kreps(1990b)则对博弈论中的很多问题进行了反省性的讨论。

关于理性选择理论的说明可参看 Kreps(1988)。

第一编

战 略 博 弈

在这部分我们将研究一种战略相互作用模型，它被称之为战略博弈(strategic game)，或者，用 von Neumann and Morgenstern(1944)的术语，称之为"标准形式博弈"。这种模型为每个参与人指定一个可能行动集合和一个建立在可能行动组合集合上的偏好顺序。

第 2 章讨论纳什均衡，对战略博弈来说这是应用最广的解的概念。第 3 章讨论紧密相关的混合战略均衡和相关均衡解，这里参与人的行动不必是确定的。纳什均衡是一个稳定状态解的概念，此间每个参与人的决策依赖于均衡知识。第 4 章研究可理性化和反复剔除劣行动的概念，此间参与人被假定为不知道均衡。第 5 章介绍一个知识模型，它使我们能正式检验在已定义好的各种解之下的种种假设。

11 # 第 2 章

纳什均衡

纳什均衡是博弈论中最基本的概念。本章我们将在战略博弈范围和贝叶斯博弈相关范围介绍它。

2.1 战略博弈

2.1.1 定义

战略博弈是一种相互作用决策的模型，这种模型假定每个决策主体选择且仅选择一次行动计划，并且这些选择是同时进行的。该模型包括参与人的有限集合 N，对每个参与人 i 有一个行动集合 A_i 和一个建立在行动组合上的偏好关系。我们称一个行动组合 $a=(a_j)_{j\in N}$ 为结果(outcome)，并且用 A 表示结果集合 $\times_{j\in N}A_j$。这里要求将每个参与人 i 的偏好定义在 A 而不是 A_i 上，这是将战略博弈从决策问题中区分出来的特征所在，即每个参与人不仅要考虑自己的行动，还要考虑其他参与人采取的行动。简言之，我们的定义如下：

▶定义 11.1 一个战略博弈包括：

• 有限集合 N(参与人集合)

• 对每个参与人 $i\in N$ 有一非空集 A_i(对参与人 i 有效的行动集合)

• 对每个参与人 $i\in N$，一个建立在集合 $A=\times_{j\in N}A_j$ 上的偏好关系 $\succsim_i$(参与人 i 的偏好关系)。

如果每个参与人 i 的行动集合 A_i 是有限的，则博弈是有限的。

该模型如此抽象使其能应用于较广的情形(situation)范围。一个参与人可以是单独的一个人或任何一个决策主体如政府、董事会、革命运动中的领导集体,甚至可以是一朵花或一只动物。该模型没有限制参与人有效的行动集合,例如,它可以包含几个元素或是一个具有多种状态依存的复杂计划集合。然而,由于我们要求一个参与人只对应一个偏好关系,该模型的使用范围也因此而有限。参与人偏好关系可以只是简单地反映参与人对可能结果的感受,在一个有机体不能有意识活动的情形下它可以是繁殖成功的机会。 12

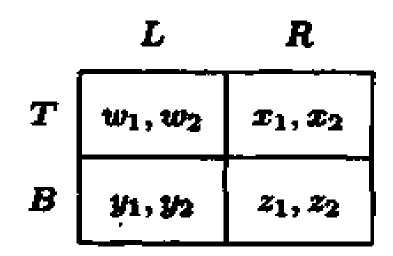
该模型如此抽象的事实,有利于它应用于很广的范围,但同时也有缺陷,因为模型的内涵不依赖于情形的任何特有性质。实际上,在这个抽象程度上,对于博弈的结果得不出什么结论。要得到有趣的结论,模型应更加具体化。

在一些情形下,参与人的偏好非常自然地被定义在结果上而不是行动组合本身。例如,当要对寡头垄断建模时,我们可能将公司集合作为参与人集合,将价格集合作为每个公司的行动集合;但我们可能希望对这样的假设建模,即每个公司仅关心她的利润,而不关心产生利润的价格组合。为此,就要引进一个结果集合 C;一个函数 $g:A\rightarrow C$,它将结果与行动组合联系起来,以及一个 C 上的偏好关系组合($\succsim_i^*$)。那么在战略博弈中每个参与人的偏好关系 $\succsim_i$ 被定义为:$a\succsim_i b$ 当且仅当 $g(a)\succsim_i^* g(b)$。

有时我们希望对这样一种情形建模,即行动组合结果受外来的一个随机变量的影响,而参与人在行动前并不知道这种影响能否实现。对此我们也能作为战略博弈处理:引进一个结果集合 C,概率空间 Ω,和一个函数 $g:A\times\Omega\rightarrow C$。该函数的解释是:当行动组合是 $a\in A$ 及随机变量的实现值是 $\omega\in\Omega$,则 $g(a,\omega)$ 便是结果。行动组合包括 C 上一个不确定事件(lottery);对每个参与人 i,偏好关系 $\succsim_i^*$ 必须是在所有这些不确定事件集合上的具体化。在战略博弈中参与人 i 的偏好关系定义如下:$a\succsim_i b$,当且仅当根据关系 $\succsim_i^*$,C 上被 $g(a,\cdot)$ 引起的不确定事件至少与被 $g(b,\cdot)$ 引起的不确定事件具有相同的后果。

在一个广泛的范围里,战略博弈中参与人 i 的偏好关系 $\succsim_i$,可以用**支付函数**(payoff function)$u_i:A\rightarrow\mathbb{R}$(亦称为效用函数)来表示,该函数的意义是,只要 $a\succsim_i b$,就有 $u_i(a)\geq u_i(b)$。我们称这一函数值为支付(或效用)。我们经常通过给定一个支付函数来确定一参与人的偏好关系。就此而言我们将博弈表示成 $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$,而不是 $\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$。 13

具有两个参与人的有限战略博弈可由图 13.1 中的表便利地表示。用行表示一个参与人的行动，另一个参与人的行动则用列表示。由行 r 和列 c 形成的方框中的两个数，为行参与人选择 r 和列参与人选择 c 时两人的支付。这样在图 13.1 的博弈中，行参与人的行动集合为 $\{T,B\}$，列参与人的行动集合为 $\{L,R\}$，并且从结果 (T,L) 来看，行参与人的支付为 w_1，列参与人的支付为 w_2。若参与人的名字为“1”和“2”，则可以方便地说行参与人为参与人 1，列参与人为参与人 2。



	L	R
T	w_1, w_2	x_1, x_2
B	y_1, y_2	z_1, z_2

图 13.1 两个参与人战略博弈的便利表示，假定每个参与人有两种行动

2.1.2 关于解释的评论

战略博弈的一般解释是：这是一个事件只发生一次的模型。每一个参与人都知道博弈的细节及所有参与人都是“理性的”（见第 1.4 节）事实；并且参与人同时独立地选择他们的行动。在这种解释下每个参与人在选择他的行动时并不知道别的参与人的选择，没有信息（除模型的基本元素外）可以让参与人用来形成对别人行动的预期。

另一个解释，也就是本书大部分内容所采用的解释是：参与人可以通过此种博弈或在过去进行的相似博弈的信息来形成别的参与人的行为预期 14 （参看第 1.5 节）。只要博弈行动间不存在战略联系，则博弈行动系列都可用战略博弈来建模。也就是，一个多次从事博弈的人必须只关心他此刻的支付而忽略他现在的行动对其他参与人将来行动的影响。在这种解释下只要排除相互作用事件间的非暂时战略联系，那么将情形模化成战略博弈便是恰当的。（第 8 章所讨论的重复博弈模型即是处理相互作用战略序列的，在那里确实存在这种非暂时联系。）

当称战略博弈参与人行动为“同时的”时候，我们并不强调这些行动是在时间的同一点上完成。如下的一种情形也能用战略博弈来建模：参与人在终点前处于不同位置，开始参与人的可能行动和支付是公开说明了的（这样它们便是参与人间的共同知识），然后每个参与人通过向中央电脑输入一

条信息来选择一个行动，当所有信息被收到后参与人便知道他们的支付了。不过，战略博弈模型应用范围比这个例子所提供的还要广泛得多。应用战略博弈建模的重要之处在于，参与人独立作决策且所有参与人在做决策前并不知道其他参与人的选择。

2.2 纳什均衡

在博弈论中使用最广的解的概念是纳什均衡。这个概念体现了战略博弈行动的稳定状态，在此状态里每一个参与人都拥有对其他参与人行动的正确预期，并且能理性行动。它并不试图去检查稳定状态达到的过程。

▶定义 14.1 **战略博弈**$\langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$的纳什均衡(a Nash equilibrium of a strategic game)是一个行动组合 $a^* \in A$，a^* 的性质是：对每一个参与人 $i \in N$。我们有：

$$(a^*_{-i}, a^*_i) \succsim_i (a^*_{-i}, a_i), \text{对所有 } a_i \in A_i.$$

这样对 a^* 为一纳什均衡而言它必须满足：对其中任何一个参与人 i 而言，当其他每个参与人 j 选择均衡行动a^*_j 时，参与人 i 没有其他行动产生的结果优于他选择 a^*_i 所产生的结果。简言之，若给定其他参与人的行动，则参与人没有积极性选择别的行动。 15

下面对定义的重新表述有时是有用的。对任一 $a_{-i} \in A_{-i}$ 定义 $B_i(a_{-i})$为参与人 i 在给定a_{-i}下最佳行动集合：

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a'_i), \text{对所有 } a'_i \in A_i\} \quad (15.1)$$

我们称集值函数 B_i 为参与人 i 的**最优反应函数**(best-response function)。纳什均衡是一个行动组合 a^*，其满足：

$$a^*_i \in B_i(a^*_{-i}), \text{对所有 } i \in N. \quad (15.2)$$

这个定义的替代形式向我们提供了(不一定有效)一个寻找纳什均衡的方法：先计算每个参与人的最优反应函数，再寻找一个行动组合 a^* 满足：对全部 $i \in N$，有 $a^*_i \in B_i(a^*_{-i})$。若函数 B_i 是单值的。则第二步就可解具有$|N|$个未知数$(a^*_i)_{i \in N}$的$|N|$个方程。

2.3 举例

下列的经典博弈代表了一些战略情形。这些博弈非常简单：在每个博弈里仅有两个参与人并且每个参与人仅有两个可能行动。但是，每个博弈都具有一类战略相互作用的本质特征，这些本质特征在更复杂情形下也是经常可见的。

◇例 15.3　巴克与斯特拉温斯基(BoS)(Bach or Stravinsky)？两个人希望一起去参加音乐会，他们要么经过 Bach，要么经过 Stravinsky。他们主要关心的是一起出去，但一个人喜欢 Bach，另一个人喜欢 Stravinsky。通过支付函数表示个人的偏好，我们有图 16.1 所示的博弈。

这种博弈经常被称为“性别战”，要了解其所包含的标准理论，请参看 Luce and Raiffa(1957, pp.90—91)。为了与这个术语系统相一致，我们称该博弈为“BoS”。

BoS 对这样一种情形建模：参与人希望协调他们的行动，但他们间又有利益冲突。该博弈有两个纳什均衡：(Bach, Bach)和(Stravinsky, Stravinsky)。也就是说，有两个稳定状态：一个是两者都选择 Bach，一个是两者都选择Stravinsky。

16

	Bach	Stravinsky
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

图 16.1　BoS 博弈(例 15.3)

◇例 16.1　合作博弈(A cordination game)如在 BoS 中一样，两个人希望一起出去，但在此例中他们就更想去的音乐会达成协议。描述这种情形的博弈如图 16.2 所示。

像 BoS 一样，该博弈有两个均衡：(Mozart, Mozart)和(Mahler, Mahler)。与 BoS 不同，参与人有共同兴趣达到这其中的一个均衡，即(Mozart, Mozart)，然而，纳什概念不排除稳定状态(Mahler, Mahler)，当然该状态结果较差。

	Mozart	Mahler
Mozart	2,1	0,0
Mahler	0,0	1,2

图 16.2 合作博弈(例 16.1)

◇例 16.2 囚徒困境(The Prisoner's Dilemma)

两名犯罪嫌疑人被分别关在两个牢房里。如果他们都坦白,则每人将判 3 年徒刑;如果只有一人坦白,则坦白者被释放并做为对另一个人的证人,另一个人将判 4 年徒刑;如果两人都不坦白,则他们两人都从轻发落只判刑一年。选择一个便利的支付来表示偏好,我们有图 17.1 所示的博弈。

	不坦白	坦白
不坦白	3,3	0,4
坦白	4,0	1,1

图 17.1 囚徒困境(例 16.2)

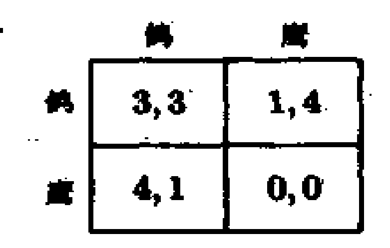
这是一种通过合作可获利的博弈——对参与人来说最好的结果是两人都不坦白——但每个参与人都愿成为无罪释放者。不管其中一个怎么做,另一个都偏好于坦白而不是不坦白,这时博弈有惟一纳什均衡(坦白、坦白)。

◇例 16.3 鹰—鸽(Hawk-Dove)

两动物为某一食物而争斗。每只动物都能像鸽或像鹰那样行动。对每只动物来说最好的结果是它像鸽一样;最坏的结果是两个都是像鹰一样。每只动物都偏向于若对手像鸽一样则它自己像鹰一样或若对于像鹰一样则它自己像鸽一样。具有这种情形的博弈如图 17.2 所示。该博弈有两个纳什均衡,(鸽,鹰)。和(鹰,鸽),其对应于参与人产生的两种不同约定。 17

◇例 17.1 猜谜博弈(Matching Pennies)

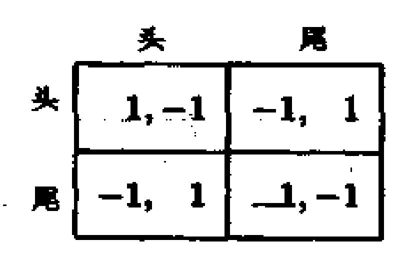
两人中的每个人都可选择"头"或"尾",若两者选择不一样,则第一个人



	鸽	鹰
鸽	3,3	1,4
鹰	4,1	0,0

图 17.2 鹰—鸽(例 16.3)

给第二个人一元钱;若两者选择一样,则第二个人给第一个人一元钱。每个人仅关心他所得的钱的数量。对这种情形建模的博弈如图 17.3 所示。这种博弈,参与人的兴趣是完全相反的,被称为“严格竞争的”。猜谜博弈没有纳什均衡。



	头	尾
头	1,−1	−1, 1
尾	−1, 1	1,−1

图 17.3 猜谜博弈(例 17.1)

18

战略博弈概念包含的情形比上述 5 个例子所述的要复杂得多。下面是三类被广泛研究的博弈:拍卖、时间博弈和位置博弈。

◇例 18.1 拍卖(An auction)

某物将被移交给集合 $\{1,\cdots,n\}$ 中的某一个参与人以换取一定的支付。参与人 i 对某物的估值是 v_i,且 $v_1>v_2>\cdots>v_n>0$。移交某物的机制是现场(密封价格)拍卖:参与人同时提供价格(非负数),该物移交给所有出价最高者中指数最低的参与人,以获得一定效用。

在一场一阶(first price)拍卖中胜者的支付就是他的出价。

?练习 18.2 试将一阶拍卖系统地表示成战略博弈形式并分析它的纳什均衡。特别地,试证明在所有均衡中参与人 1 获得该物。

在一场二阶(second price)拍卖中胜者的支付是这些未胜的参与人所提供的价格中最高的(这样若只有一个参与人提出最高价则支付的价格是第二高价)。

⑦ 练习 18.3 试证明在一场二阶拍卖中任何一个参与人的出价 v_i 都是次优(weakly dominant)行动不管其他参与人的行动,当参与人 i 出价为 v_i 时,他的支付至少与当他出其他任何价时的支付一样高。试证明胜者不是参与人 1 仍有("非效率的")均衡。

◇例 18.4 消耗战(A war of attrition)

两个参与人争夺同一个物体。物体对参与人 i 的价值为 $v_i>0$,时间设为连续变量,从 0 开始直到无穷。每个参与人选择向另一个参与人交出物体的时间;若一个参与人在时间 t 移交,则另一个人在此时同时得到。若两个参与人同时交出,则物体在他们间平分,参与人 i 得到支付 $v_i/2$。时间是有价值的:每一单位时间每个参与人失去一个单位支付,直到第一次移交发生。

⑦ 练习 18.5 将这一情形系统表示成战略博弈形式并证明在所有纳什均衡中某一个参与人会立即移交。

◇例 18.6 置位博弈(A location game)

n 个人中的每个人都面临是否做政治候选人的选择,如果选择了是,则还要选位置。有一个市民的群体,每一市民都有一个喜欢的位置,喜欢的位置分布由[0,1]上的一个密度函数 f 给定,f 满足:对所有 $x\in[0,1]$,有 $f(x)>0$。对候选人来说,如果他距市民喜欢的位置较其他候选人更近,则他可获得该市民的选票;如果 k 个候选人选择了同一位置,则每个候选人将得到该位置所能吸引到的选票 $1/k$。竞选的胜者为获选票最多者。每个参与人的偏好为:自己是惟一获胜者优于与他人并列第一,并列第一优于不参加竞选;不参加竞选优于虽参加却失败了。 19

⑦ 练习 19.1 将这种情形系统地表达成一个战略博弈,试找出 $n=2$ 时的纳什均衡集合,并证明当 $n=3$ 时没有纳什均衡。

2.4 纳什均衡的存在性

就像猜谜博弈(见图 17.3)所表明的那样,不是每个战略博弈都有纳什均衡。博弈的纳什均衡集合非空的条件已被广泛地考察过。我们现在给出

此类结论中最简单的一种。(尽管该结论的数学水平较之于本书其他部分要高,但它并不依赖于细节。)

存在性结论有两个目的。首先,如果有一个符合结论假设的博弈,那我们为寻求均衡付出的努力就会有成功的希望。其次,更重要的是,均衡存在性表明博弈是与一个稳定状态解相一致的。进一步说,一类博弈的均衡存在性使得我们可以去研究均衡的性质(例如通过使用"比较静态"技巧)而不用去具体地找到均衡,也不用冒研究空集的风险。

为了说明一个博弈具有纳什均衡就不得不去说明行动组合 a^*,其满足对所有 $i \in N$, $a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$(参看(15.2))。通过 $B(a) = \times_{i \in N} B_i(a_{-i})$ 来定义集值函数 $B: A \to A$。那么(15.2)可以简单地写成向量形式 $a^* \in B(a^*)$。不动点定理给出了 B 上的条件,在此条件下确定存在一个值 a^* 满足 $a^* \in B(a^*)$。我们所使用的不动点定理如下所述(这要归功于 Kakutani(1941))。

■引理 20.1(Kakutani 的不动点定理)。

20 令 X 是$\mathbb{R}^n$ 的一个紧凸子集,令 $f: X \to X$是一集值函数且满足:

- 对所有 $x \in X$,集合 $f(x)$非空且凸;
- f 的图形是闭的(亦即:对所有序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$,对所有 n 有 $y_n \in f(x_n)$, $x_n \to x$, $y_n \to y$,我们有 $y \in f(x)$)。

则存在 $x^* \in X$ 满足$x^* \in f(x^*)$。

? 练习 20.2 试证明下面的 4 个条件都是 Kakutani 定理必须的:(i) X 是紧的;(ii) X 是凸的;(iii)对每个 $x \in X$, $f(x)$是凸的;(iv) f 有一个闭图形。

如果对每个 $a^* \in A$,集合$\{a_i \in A_i : (a_{-i}^*, a_i) \succsim_i a^*\}$是凸的,则可定义 A 上的偏好关系$\succsim_i$ 为A_i 上拟凹的(quasi-concave)。

■命题 20.3 战略博弈$\langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$若对所有 $i \in N$ 满足:

- 参与人 i 的行动集合 A_i 是欧氏空间的一个非空紧凸子集;

并且偏好关系$\succsim_i$ 是

- 连续的
- 在 A_i 上拟凹的。

则,该博弈有一个纳什均衡。

证明：通过 $B(a)=\times_{i\in N}B_i(a_{-i})$来定义 $B:A\rightarrow A$（这里 B_i 是参与人 i 的最优反应函数，定义见(15.1)）。对任一 $i\in N$，由于 $\succsim_i$ 是连续的且 A_i 是紧的，则 $B_i(a_{-i})$ 非空，又由于 $\succsim_i$ 在 A_i 上是拟凹的，所以 $B_i(a_{-i})$ 又是凸的；因为每个 $\succsim_i$ 是连续的，所以 B 有闭图。这样应用 Kakutani 定理 B 有一个不动点；正如我们所注意的那样任何不动点都是博弈的纳什均衡。 □

请注意：这个结论保证了满足一定条件的战略博弈至少有一个纳什均衡；正如我们所见，一个博弈可以有不止一个均衡。（我们并没有讨论结论在什么条件下仅有一个纳什均衡。）同时也应注意到命题 20.3 不适用于任何其中有某个参与人有有限多个行动的博弈，因为这种博弈违背了每个参与人行动集合是凸的条件。

?练习 20.4 对称博弈(Symmetric games)。

考虑一个满足命题 20.3 条件的两人战略博弈。令 $N=\{1,2\}$ 并且假定博弈是对称的。$A_1=A_2$ 并且 $(a_1,a_2)\succsim_1(b_1,b_2)$ 当且仅当 $(a_2,a_1)\succsim_2(b_2,b_1)$，对所有 $a\in A,b\in A$。利用 Kakutani 定理去证明有一个行动 $a_1^*\in A_1$ 使得 (a_1^*,a_1^*) 是博弈的一个纳什均衡。（这一均衡称为对称均衡）试给出一个仅有非对称解的有限对称博弈的例子。 21

2.5 严格竞争博弈

对于一个任意的战略博弈纳什均衡集合，我们并没有太多的话可说，仅在一些确定的博弈类型里我们能对均衡的质的特性作些说明。一种确定类型的博弈是这样的，在这种博弈中有两个参与人，他们的偏好是正好相反的。为讨论方便我们在这部分假定参与人的名字为“1”和“2”（即：$N=\{1,2\}$）。

▶定义 21.1 战略博弈 $\langle\{1,2\},(A_i),(\succsim_i)\rangle$ 是**严格竞争的**(strictly competitive)，如果：对任一 $a\in A$ 和 $b\in A$ 我们有 $a\succsim_1 b$，当且仅当 $b\succsim_2 a$。

一个严格竞争博弈有时也叫做零和(zerosum)博弈，因为如果用支付函数 u_1 表示参与人 1 的偏好关系 $\succsim_1$，则用 u_2 表示参与人 2 的偏好关系，且 $u_1+u_2=0$。

对于参与人 i，如果他在假设不管自己采取什么行动，参与人 j 都将选择使他损失尽可能大的行动基础上选择对他自己最好的行动，则我们说参与人 i 最大最小化(maxminimizes)。我们现在要说明的是，对于一个具有纳什均衡的严格竞争博弈来说，一对行动是纳什均衡当且仅当每个参与人的行动都是最大最小化者。这个结论很有意义，因为它提供了一种个人决策与纳什均衡概念背后的理论之间的联系。在推导这一结论的过程中我们也要证明一个具有纳什均衡的严格竞争博弈的所有均衡产生同一支付这一强结论。在非严格竞争博弈中纳什均衡的这个特性是很少能得到满足的。

▶定义 21.2　令 $\langle\{1,2\}(A_i),(u_i)\rangle$ 是一个严格竞争战略博弈。行动 $x^*\in A_1$ 是**参与人 1 的最大最小化行动**如果有：

$$\min_{y\in A_2}u_1(x^*,y)\geqslant\min_{y\in A_2}u_1(x,y),\qquad 对所有\ x\in A_1.$$

同样，行动 $y^*\in A_2$ 是**参与人 2 的最大最小化运行**如果有：

$$\min_{x\in A_1}u_2(x,y^*)\geqslant\min_{x\in A_1}u_2(x,y),\qquad 对所有\ y\in A_2.$$

22　简言之，对参与人 i 来说最大最小化行动就是最大最小化参与人 i 能保证获得的支付的行动。对参与人 1 来说最大最小化行动解决了问题 $\max_x\min_y u_1(x,y)$，相应对参与人 2 来说最大最小化行动解决了问题 $\max_y\min_x u_2(x,y)$。

在下文里为了方便起见假定参与人 1 的偏好关系用支付函数 u_1 表示，并且不失一般性，$u_2=-u_1$，下面的结论表明，参与人 2 支付的最大最小化值等同于参与人 1 支付的最小最大化值。

■引理 22.1　令 $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ 为一严格竞争战略博弈。那么有

$$\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1}u_2(x,y)=-\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1}u_1(x,y).$$

进一步而言，$y\in A_2$ 解决了问题 $\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1}u_2(x,y)$ 当且仅当它解决了问题 $\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1}u_1(x,y)$。

证明：对任何函数 f 我们有 $\min_z(-f(z))=-\max_z f(z)$ 和 $\arg\min_z(-f(z))=\arg\max_z f(z)$。从而对每一 $y\in A_2$ 我们有 $-\min_{x\in A_1}u_2(x,y)$

$=\max_{x\in A_1}(-u_2(x,y))=\max_{x\in A_1}u_1(x,y)$。这样 $\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1}u_2(x,y)=-\min_{y\in A_2}[-\min_{x\in A_1}(u_2(x,y))]=-\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1},u_1(x,y)$;并且有:$y\in A_2$ 是问题 $\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1}u_2(x,y)$的解,当且仅当它是问题 $\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1}u_1(x,y)$的解。 □

下面的结果给出了严格竞争博弈纳什均衡与最大最小化行动集合之间的一种联系。

■命题 22.2 令 $G=\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$是一严格竞争战略博弈。

(a)如果(x^*,y^*)是 G 的一个纳什均衡,则对参与人 1 来说 x^*是最大最小化行动,对参与人 2 来说 y^*是最大最小化行动;

(b)如果(x^*,y^*)是 G 的一个纳什均衡,则 $\max_x\min_y u_1(x,y)=\min_y\max_x u_1(x,y)=u_1(x^*,y^*)$,并且有 G 的所有纳什均衡产生同一支付;

(c)如果 $\max_x\min_y u_1(x,y)=\min_y\max_x u_1(x,y)$(特别地,如果 G 有一个纳什均衡(参看 b)),x^*是参与人 1 的最大最小化行动,y^*是参与人 2 的最大最小化行动,那么(x^*,y^*)是 G 的一个纳什均衡。

证明:我们先证明(a)和(b),令(x^*,y^*)是 G 的一个纳什均衡,那么对所有$y\in A_2$有 $u_2(x^*,y^*)\geqslant u_2(x^*,y)$。或者,既然 $u_2=-u_1$,则对所有$y\in A_2$有 $u_1(x^*,y^*)\leqslant u_1(x^*,y)$,因此,$u_1(x^*,y^*)=\min_y u_1(x^*,y)\leqslant\max_x\min_y u_1(x,y)$。同样地,对所有 $x\in A_1$,$u_1(x^*,y^*)\geqslant u_1(x,y^*)$从而对所有 $x\in A_1$,$u_1(x^*,y^*)\geqslant\min_y u_1(x,y)$,于是 $u_1(x^*,y^*)\geqslant\max_x\min_y u_1(x,y)$。这样 $u_1(x^*,y^*)=\max_x\min_y u_1(x,y)$并且 x^*是参与人 1 的最大最小化行动。 23

对参与人 2 可类似证明,y^*是参与人 2 的最大最小行动,并且 $u_2(x^*,y^*)=\max_y\min_x u_2(x,y)$,于是 $u_1(x^*,y^*)=\min_y\max_x u_1(x,y)$。

为了证明(c),令 $v^*=\max_x\min_y u_1(x,y)=\min_y\max_x u_1(x,y)$。应用引理 22.1 我们有 $\max_y\min_x u_2(x,y)=-v^*$。因为 x^*是参与人 1 的最大最小化行动,我们有:对所有$y\in A_2$,$u_1(x^*,y)\geqslant v^*$;因为 y^*是参与人 2 的最大最小化行动,我们有:对所有 $x\in A_1$,$u_2(x,y^*)\geqslant -v^*$。在上述两个不等式中令 $y=y^*$及 $x=x^*$,我们得到 $u_1(x^*,y^*)\geqslant v^*$,并且利用$u_2=-u_1$这一事实,我们得到$(x^*,y^*)$是 G 的一个纳什均衡的

结论。 □

由(c)可注意到一个纳什均衡可通过求解问题 $\max_x \min_y u_1(x, y)$ 找到,当计算一个博弈的纳什均衡,特别是当参与人随机行动时(参看例36.1),上述事实是非常有用的。

从(a)和(c)也可注意到一个严格竞争博弈的纳什均衡是可互换的(interchangeable):如果(x, y)和(x', y')是均衡解,则(x, y')和(x', y)也是均衡解。

(b)表明对任何有纳什均衡解的严格竞争博弈,$\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$。请注意不等式 $\max_x \min_y u_1(x, y) \leqslant \min_y \max_x u_1(x, y)$具有更多一般性质:对所有 y,给定任一 x'我们有 $u_1(x', y) \leqslant \max_x u_1(x, y)$,于是 $\min_y u_1(x', y) \leqslant \min_y \max_x u_1(x, y)$,(若最大、最小不能被有效定义,则可用上、下确界分别来代替最大、最小)这样在任何博弈中(无论它是否为严格竞争的)参与人 1 都能保证自己获得的支付就是参与人 2 能牵制她的最多数量。"博弈有一纳什均衡"这一假设在建立反向不等式中是必要的。为了明白这个论断,可以考虑猜谜博弈(图 17.3),在那里 $\max_x \min_y u_1(x, y) = -1 < \min_y \max_x u_1(x, y) = 1$。

如果 $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$那我们就说这个支付,即参与人 1 的均衡支付,是这个博弈的值(value)。从命题 22.2 可知如果 v^* 是严格竞争博弈的值,那么参与人 1 的任何均衡战略都可保证她的支付至少与她的均衡支付 v^* 一样多,同时参与人2 的任何均衡战略都能保证他的支付至少与他的均衡支付 $-v^*$ 一样多,于是参与人 2 任一这样的战略都能保证参与人 1 的支付至多与她的均衡支付一样多。在一个非严格竞争博弈中参与人的均衡战略一般不具有这些性质(例如,可考虑 BoS(图 16.1))。

24

☑练习 24.1 令 G 为一个具有纳什均衡的严格竞争博弈。

a. 试证明:如果在 G 中增加参与人 1 的一些支付来形成一个新的严格竞争博弈 G',则 G'不存在这样的均衡,即在该均衡里参与人 1 的状况比在 G 的均衡里恶化了。(注意,G'可能根本没有均衡。)

b. 试证明:若参与人 1 被禁止使用 G 中的某一行动从而形成一个新的博弈 G',则 G'不存在这样的均衡,即在该均衡里参与人 1 的支付高于在均衡 G 里的支付。

c. 试举例证明:对一个非严格竞争博弈来说 a、b 中的两个性质都不是必要的。

2.6 贝叶斯博弈:不完全信息战略博弈

2.6.1 定义

我们经常希望对一部分人并不确知另一部分人的特征的情形建模:与战略博弈紧密相关的贝叶斯博弈模型便是为此而设计的。

作为一种战略博弈,贝叶斯博弈有两个基本元素:参与人集合 N 和行动集合组合(A_i),为了对参与人相互间不确定性建模,我们引进一个可能"自然状态"集合 Ω,其中的每个元素都是对所有参与人相关特征的描述。为方便起见我们假定 Ω 是有限的。通过给定 Ω 上的一个概率测度 p_i,每个参与人 i 便有一个关于自然状态的先验概率(prior belief)。在任何一个给定的博弈行动中,某一自然状态 $\omega \in \Omega$ 是实现了的。我们通过引进**信号函数**(signal functions)组合(τ_i)来对参与人关于自然状态的信息建模。当自然状态为 ω,在参与人1选择他的行动前,用 $\tau_i(\omega)$表示他所观察到的信号。令 T_i 为 τ_i所有可能值的集合,我们称 T_i 为参与人 i 的类型(*type*)集合。我们假定对所有 $t_i \in T_i$,$p_i(\tau_i^{-1})(t_i) > 0$(参与人1给 T_i 中的每一个元素赋正先验概率)。如果参与人 i 收到信号 $t_i \in T_i$,则他推断状态在集合 $\tau_i^{-1}(t_i)$中;他关于已实现状态的**后验概率**(posterior belief))赋予每一状态 $\omega \in \Omega$,以概率 $p_i(\omega)/p_i(\tau_i^{-1}(t_i))$,此时要求 $\omega \in \tau_i^{-1}(t_i)$,否则,赋零概率(亦即,$\omega$ 的概率是以其在 $\tau_i^{-1}(t_i)$上为条件的)。例如,对所有 $\omega \in \Omega$,若 $\tau_i(\omega) = \omega$ 则参与人拥有关于自然状态的全部信息。或者,如果 $\Omega = \times_{i \in N} T_i$ 并且对每一参与人 i 概率测度 p_i 是 Ω 上的乘积测度,同时 $\tau_i(\omega) = \omega_i$,则参与人的信号是独立的且参与人 i 从他的信号里不能获得任何关于其他参与人的信息。

25

像在战略博弈里一样,每个参与人关心他的行动组合,同时他也可能关心自然状态。现在即使他知道在任何一个自然状态下其他每一个参与人所采取的行动,在给定他所采取的行动条件下,他也可能不能确定将要实现的二元组(a, ω)。因为他只有关于自然状态的不完全信息。因此我们在模型中引进一个有关 $A \times \Omega$ 上不确定事件的偏好关系组合$(\succsim_i)$(这里,同前 $A = \times_{j \in N} A_j$)。简言之,我们作以下定义。

▶定义 25.1 一个**贝叶斯博弈**(Bayesian game)包括:

- 有限集合 N(参与人集合)
- 有限集合 Ω(状态集合)

并且对每个参与人 $i \in N$ 有

- 集合 A_i(对参与人 i 有效的行动集合)
- 有限集合 T_i(可能被参与人 i 所观察到的信号集合)和一个函数 τ_i: $\Omega \to T_i$(参与人 i 的信号函数)
- Ω 上的一个概率测度 p_i(参与人 i 的先验概率)满足对所有 $t_i \in T_i$ 有 $p_i(\tau_i^{-1}(t_i))>0$
- 一个关于 $A \times \Omega$ 之上概率测度集合的偏好关系 $\succsim_i$(参与人 i 的偏好关系),这里 $A = \times_{j \in N} A_j$。

请注意这个定义允许所有参与人有不同的先验概率。这些概率可能是相关的,一般来说它们是同分布的,并与一个"客观的"测度相一致。这个模型被经常运用于自然状态是参与人偏好参数组合的情形(例如,他们对一个物体估值的组合)。不过,这个模型是很一般的,在 2.6.3 部分我们将讨论它被应用于每个参与人不确定别人所知的情形。

同时也应注意到有时描述贝叶斯博弈并不涉及暗含的状态空间 Ω,而是描述成"简化形式",即与参与人信息相关的基本元素是可能类型集合的组合。

26

现在我们回头来谈贝叶斯博弈均衡的定义。在任何给定的博弈行动里每个参与人都知道他的类型,并且他不需要考虑在其他类型情形下他将做什么。因此,一个参与人可能会认为应对每个孤立的自然状态定义均衡。然而,在任一给定的状态里,一个希望决定他最优行动的参与人可能需要考虑别的参与人在别的状态里将如何做,因为他可能对状态不完全了解。进一步说,这一考虑的帮助信息可能依赖于参与人自己在别的状态里将选择的行动,因为别的参与人也可能对状态不完全了解。

这样我们就可将一个贝叶斯博弈 $\langle N, \Omega, (A_i), (T_i), (\tau_i), (p_i), (\succsim_i)\rangle$ 的纳什均衡定义成一个战略博弈 G^* 的纳什均衡,G^* 中对每个 $i \in N$ 和每个可能信号 $t_i \in T_i$ 都有个参与人,这个参与人称为 (i, t_i)。("具有类型 t_i 的参与人 i")。每个这种参与人 (i, t_i) 的行动集合为 A_i;这样在 G^* 中行动组合的集合为 $\times_{j \in N}(\times_{t_j \in T_j} A_j)$。每个参与人 (i, t_i) 的偏好如下定义。参与人 i 的后验概率,与 G^* 中的一个行动组合 a^* 一起,产生关于 $A \times \Omega$ 的一个不确定事件 $L_i(a^*, t_i)$:由 $L_i(a^*, t_i)$ 赋给 $((a^*(j, \tau_j$

$(\omega)))_{j\in N},\omega)$的概率，是参与人在收到信号 t_i 时状态为 ω 的后验概率，$(a^*(j,\ \tau_j(\omega))$是参与人$(j,\ \tau_j(\omega))$在组合 a^* 中的行动。在 G^* 中参与人(i,t_i)偏好行动组合 a^* 优于行动组合 b^*，当且仅当参与人 i 在贝叶斯博弈中对不确定事件$L_i(a^*,t_i)$的偏好优于不确定事件 $L_i(b^*,t_i)$。由此，我们有下述内容。

▶定义 26.1 **一个贝叶斯博弈$\langle N,\Omega,(A_i),(T_i),(\tau_i),(p_i),(\succsim_i)\rangle$的纳什均衡是一个定义如下的战略博弈纳什均衡：**

- 参与人集合是所有二元组(i,t_i)的集合，其中 $i\in N,t_i\in T_i$。
- 每个参与人(i,t_i)的行动集合是 A_i。
- 每个参与人(i,t_i)的偏好顺序$\succsim^*_{(i,t_i)}$定义如下：

$a^*\succsim^*_{(i,t_i)}b^*$当且仅当 $L_i(a^*,t_i)\succsim_i L_i(b^*,t_i)$，

这里 $L_i(a^*,t_i)$是关于 $A\times\Omega$ 的不确定事件，若 $\omega\in\tau_i^{-1}(t_i)$，则其将概率$p_i(\omega)/p_i(\tau_i^{-1}(t_i))$赋给$((a^*(j,\ \tau_j(\omega)))_{j\in N},\omega)$，否则，赋零值。

也就是说，在一个贝叶斯博弈纳什均衡中，每个参与人在给定他所收到的信号及他所持的从信号推断的有关状态及别的参与人行动的信念条件下选择对他有效的最优行动。注意为了确定一个行动组合是否为贝叶斯博弈的纳什均衡，我们仅需知道贝叶斯博弈中的每个参与人是如何比较关于 $A\times\Omega$ 的不确定事件的，这里 Ω 上的概率分布是一样的：参与人从来不必比较概率分布相异的不确定事件。这样从纳什均衡的观点看，在贝叶斯博弈中参与人偏好的具体化包含了冗余信息。(这种冗余在战略博弈中类似存在：为了定义一个战略博弈的纳什均衡我们仅需知道任何一个参与人 i 是如何将一个结果(a_{-i},a_i)与另一个结果(a_{-i},b_i)相比较的。) 27

2.6.2 例

◇例 27.1 二阶拍卖(Second-price auction)考虑例 18.1 所述的二阶封价拍卖的一个变形，在例 18.1 中每个参与人知道他的估价 v_i，但不能确定别人的估价。作为特例，假定可能估价集合是有限集合 V 及每个参与人都相信任何一个其他参与人独立作出的估价都是从 V 上的同一分布出发的。则我们能将此情形建成贝叶斯博弈模型，其中：

- 参与人集合 N 是$\{1,\cdots,n\}$
- 状态集合 Ω 是 V^n(估价的组合集合)
- 参与人 i 的行动集合A_i 是$\mathbb{R}_+$
- i 能收到的信号集合 T_i 是 V
- i 的信号函数 τ_i定义为 $\tau_i(v_1,\cdots,v_n)=v_i$
- 先验概率 p_i 为:对 V 上的某个概率分布 π, $p_i(v_1,\cdots,v_n)=\prod_{j=1}^n\pi(v_j)$
- 参与人 i 的偏好关系由某一随机变量的期望所表示。在状态$(v_1,\cdots,v_n)$下,如果参与人 i 具有最低指数,对所有 $j\in N$,有 $a_i\geqslant a_j$,则该随机变量期望值为 $v_i-\max_{j\in N\setminus\{i\}}a_j$,否则,随机变量期望值为 0。

这个博弈有一个纳什均衡 a^*,在此均衡中对所有 $i\in N$ 及$v_i\in V=T_i$有 $a^*(i,v_i)=v_i$(每个参与人提出他的估价)。实际上(如练习 18.3)每个类型中每个参与人提出的估价都是弱占优行动。

?练习 27.2　两个参与人希望通过 Bach 或 Stravinsky 一起去参加一场音乐会。如在 BoS 中一样,他们主要关心的是一起出去,但他们两个人都不知道另一个人是偏好 Bach,还是 Stravinsky。每个参与人的偏好由他的支付的期望值表示,对纯结果来说支付类似于图 16.1 所示。试将上述情形建成贝叶斯模型并找到对所有可能概率的纳什均衡。并特别证明存在这样的均衡:在此均衡里存在两个参与人不去同一音乐会的正概率。

28

?练习 28.1　**交换博弈**(An exchange game)每个参与人收到一张票,票上有一个在区间[0,1]的某个有限子集合 S 中的数字。参与人票上的数字是他可能得到的价格。两个价格具有独立同分布函数 F。每个参与人被单独、同时询问他是否愿把自己的价格与另一人的价格交换。若两个人都同意则交换成功,否则每个参与人只接受自己的价格。每个参与人的目标是使自己的期望支付最大化。试将此情形建成贝叶斯博弈模型并证明在任何纳什均衡中每个参与人愿交换的最高价是最小的可能价。

?练习 28.2　通过构造一个具有如下特征的两人贝叶斯博弈来说明更多的信息可能损害某个参与人;参与人 1 完全知道信息而参与人 2 并非如此;该博弈只有惟一纳什均衡,在此均衡中参与人 2 的支付高于他在任一个他知道参与人 1 类型的相应博弈的惟一均衡中的支付。

2.6.3 关于贝叶斯博弈模型的评价

参与人都不确知相互特征的情形可被建成贝叶斯博弈模型，在此模型里参与人的不确定性通过某个“状态”集合上的一个概率测度来表示，这些思想要归功于 Harsanyi(1967/68)。Harsanyi 假定每个参与人的先验概率都是一样的，他认为参与人知识的所有差异都应从赋予每个参与人信息的客观机制里导出，而不是来源于参与人初始信念的差异。在第5.3节我们指出了共同先验概率的假设对参与人后验概率间的关系具有较强的涵义。(例如，在一对参与人接收到他们的信号后下述这些内容不可能是他们间的“共同知识”，即参与人1相信自然状态的概率在某一给定集合下是 α 而参与人2相信此概率为 $\beta\neq\alpha$。尽管参与人1相信概 29 率为 α 且参与人2相信概率为 β 是可能的，但他们中的任何一人都并不确知另一位的信念。)

贝叶斯博弈不仅可用于对如练习27.1所述的每个参与人不确知别的参与人支付的情形建模，还可应用于每个参与人并不确知其他参与人知识(knowledge)的情形。

例如，考虑这样一个贝叶斯博弈：参与人集合为 $N=\{1,2\}$，状态集合为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，每个参与人的先验概率对每一状态赋概率1/3，信号函数定义为 $\tau_1(\omega_1)=\tau_1(\omega_2)=t'_1$，$\tau_1(\omega_3)=t''_1$，和 $\tau_2(\omega_1)=t'_2$，$\tau_2(\omega_2)=\tau_2(\omega_3)=t''_2$，参与人1的偏好对 $j=1,2$ 和行动组合 $b.c$ 满足 $(b,\omega_j)\succ_1(c,\omega_j)$ 及 $(c,\omega_3)\succ_1(b,\omega_3)$。而参与人2对所有 (a,ω) 均有同等偏好。状态 ω_1 下在这种博弈中参与人2知道参与人1对 b 的偏好优于 c，而状态2下他不知道参与人是更偏好 b 还是 c。因为状态1下参与人1不知道状态是 w_1 还是 w_2。此情形下她不知道(ⅰ)参与人2是否知道她对 b 的偏好优于 c，或是(ⅱ)是否参与人2不确知她是更偏好 b 还是更偏好 c。

参与人不确知相互知识的情形是否都能用贝叶斯博弈来建模呢？假定参与人的支付仅依赖于一个参数 $\theta\in\Theta$。有 X_i 表示每个参与人 i 的可能信念集合。那么任一参与人 j 的信念是一个 $\Theta\times X_{-j}$ 上的概率分布。也就是，任何参与人的信念集合都会涉及其他所有参与人的信念集合才能确定。这样对我们所提问题的回答就很有意义并且等同于这样的问题：是否我们能找到这样一个集合组合 $\{X_j\}_{j\in N}$，该集合满足对所有 $i\in N$。集合 X_i 同构于 $\Theta\times X_{-i}$ 上的概率分布集合，如果能这样，我们就可令 $\Omega=\Theta\times(\times_{i\in N}X_i)$ 为状态空间并用贝叶斯博弈模型去处理任何参与人不仅不确知每个其

他人的支付，而且还不确知每个其他人信念的情形。对这一问题的积极回答由 Mertens and Zamir(1985)给出。我们省略了证明。

[注解]

在 Borel(1921)和 von Neumann(1928)的文章中首次提出抽象战略博弈的概念。Nash(1950a)在此类博弈的背景下形成了纳什均衡概念；其中所包含的基本思想至少可追溯到 Cournot(1838)。命题 20.3 证明的思想首创于 Nash(1950a, 1951)和 Glicksberg(1952)，尽管他们所证结论有细微差异。正如所述，此结论类似于 Nikaidô and Isoda(1955)中的定理 3.1。最大最小化思想至少在 18 世纪初就已存在(参看 Kuhn(1968))。命题 22.2 的主要思想应归于 von Neumann(1928)，严格竞争博弈理论由 von Neumann 和 Morgenstern(1944)发展。贝叶斯博弈由 Harsanyi(1967/68)定义和研究。

30

"囚徒困境"似乎最早在 Raiffa(1951)和 Flood(1952，与 Dresher 合作的论文)的未出版的文献中提出，该博弈的标准解释应归于 Tucker(参看 Raiffa(1992.p.173))。BoS 应归于 Luce 和 Raiffa(1957)。"鹰一兔"又被称作"斗鸡"。拍卖(例 18.1 和 27.1)最早由 Vickrey(1961)正式研究。例 18.4 中的消耗战应归于 Maynard Smith(1974)，例 18.6 中的置位博弈应归于 Hotelling(1929)，例 28.1 中的博弈应归于 Brams、Kilgour 和 Davis(1993)。

第3章

31

混合、相关及演进均衡

本章我们研究两个均衡概念：混合战略纳什均衡和相关均衡。在这些均衡中参与人的行动都是不确定的。我们还将简单考察一个纳什均衡的变形，它用来对一个演进过程建模。

3.1 混合战略的纳什均衡

3.1.1 定义

混合战略纳什均衡概念被设计用来对某种博弈的稳定状态建模，在此种博弈中参与人的选择并不确定而是受概率规则调节。我们首先讨论正式定义，然后再讨论它们的解释。

在前面章节中我们将一个战略博弈定义为一个三元组$\langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$，这里每个参与人$i$的偏好关系$\succsim_i$被定义在行动组合集合$A=\times_{i\in N}A_i$上(见定义11.1)。在本章我们允许参与人的选择是非确定的，这样就需要给模型的基本元素增加一个每个参与人关于在A上不确定事件的偏好关系的详细说明。遵从于现代博弈理论的习惯，我们假定每个参与人i的偏好关系满足冯·诺依曼和摩根斯坦恩的假设，这样偏好关系就可用某一函数$u_i: A\to\mathbb{R}$的期望值来表示。因此本章中我们关于战略相互作用的模型是一个三维组$\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$，它不同于我们原来定义的战略博弈，在这里对每一$i\in N$，$u_i: A\to\mathbb{R}$是一个期望值，代表了参与人$i$关于$A$上的不确定事件集合的偏好关系的函数。不过，我们均将这类模型简称为**战略博弈**。

令$G=\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$是一个这样的战略博弈。我们用$\Delta(A_i)$来表示 32

A_i 上的概率分布集合并且称 $\Delta(A_i)$的一个元素为参与人 i 的一个**混合战略**(mixed strategy)。我们假定参与人的混合战略是独立随机化的。为明确起见,我们又称 A_i 的一个元素为一个**纯战略**(pure strategy)。对任一有限集 X 和 $\delta \in \Delta(X)$我们用 $\delta(x)$表示 δ 赋给 $x \in X$ 的概率并且将 δ 的支集(support)定义为由 $x \in X$ 构成的集合,其中 $\delta(x) > 0$。混合战略的一个组合$(\alpha_j)_{j \in N}$产生了集合 A 上的一个概率分布。例如,如果每个 A_j 是有限的,则在给定随机化独立性的条件下行动组合 $a = (a_j)_{j \in N}$的概率便是 $\Pi_{j \in N}\alpha_j(a_j)$,这样参与人 i 对$(\alpha_j)_{j \in N}$的估值是 $\sum_{a \in A}(\Pi_{j \in N}\alpha_j(a_j))u_i(a)$。

现在我们从 G 派生出另一个战略博弈,称之为 G 的"混合扩展",在该博弈里每个参与人 i 的行动集合是他在 G 中混合战略集合 $\Delta(A_i)$。

▶**定义 32.1** 战略博弈$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的**混合扩展**(mixed extension)是这样一个战略博弈$\langle N,(\Delta(A_i)),(U_i)\rangle$:$\Delta(A_i)$是 A_i 上的概率分布集合,并且 $U_i: \times_{j \in N}\Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ 将 U_i 下关于 A 上由 α 引起的不确定事件的期望值赋给每个 $\alpha \in \times_{j \in N}\Delta(A_j)$(这样若 A 有限,则 $U_i(\alpha) = \sum_{a \in A}(\Pi_{j \in N}\alpha_j(a_j))u_i(a)$。

请注意每个函数 U_i 都是多重线性的。也就是,对任意混合战略组合 α、参与人 i 的任何混合战略 β_i 和 γ_i 以及任一 $\lambda \in [0,1]$我们有 $U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda)U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i)$。同时要注意在每一 A_i 为有限情形下,对任一混合战略组合 α 我们有

$$U_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) U_i(\alpha_{-j}, e(a_i)) \qquad (32.2)$$

这里 $e(a_i)$是参与人 i 的退化混合战略,它使 $a_i \in A_i$ 的概率为 1。

我们现在来定义本章要研究的主要均衡概念。

▶**定义 32.3** **一个战略博弈的混合战略纳什均衡**(a mixed strategy Nash equilibrium of a strategic game)是该博弈混合扩展的纳什均衡。

假定 $\alpha^* \in \times_{j \in N}\Delta(A_j)$是 $G = \langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的一个混合战略纳什均衡,该均衡中每个参与人 i 的混合战略 α_i^* 在它将概率 1 赋给一个元素(如 A_i 中的 a_i^*)的意义下是退化的。那么,因为 A_i 可用 $\Delta(A_i)$的一个子集来确定,所以行动组合 a^* 是 G 的一个纳什均衡。反之,假定 a^* 是 G 的一个纳什均衡,那么由 U_i 在 α_i 中的线性可知,没有 A_i 中的行动之上的概率分布使参与人 i 获得的支付高于由 $e(a_i^*)$产生的支付,这样组合$(e(a_i^*))$是

G 的一个混合战略。

我们刚才已经讨论了一个战略博弈的纳什均衡集是它的混合战略纳什均衡集合的一个子集。在第2章我们看到存在纳什均衡集为空的博弈。不过，如下所述，任意每个参与人只有有限多个行动的博弈至少有一个混合战略纳什均衡。

■**命题 33.1** 任何有限战略博弈都有一个混合战略纳什均衡。

证明：令 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 是一战略博弈，并且对每一参与人 i 令 m_i 为集合 A_i 元素的个数。那我们就能用向量$(p_1,\cdots p_{m_i})$集合来确定参与人 i 的混合战略集合 $\Delta(A_i)$，其中对所有 k，$p_k\geqslant 0$ 且 $\sum_{k=1}^{m_i}p_k=1$（p_k 为参与人 i 使用第 k 个纯战略的概率）。这个向量集合是非空、凸和紧的。既然在概率上期望支付是线性的，那么每个参与人在 G 的混合扩展中的支付函数对于他自己的战略是拟凹和连续的。这样 G 的混合扩展满足命题 20.3 所有的条件。 □

对此证明最关键的假设是每个参与人 i 的行动集合是有限的。克里克斯伯格(Glicksberg, 1952)证明了若一个博弈中每个行动集合是欧氏空间的凸紧子集且每个支付函数是连续的，则它有混合战略纳什均衡。（如果每个参与人的支付函数在他的行动中也是拟凹的，那么命题 20.3 表明这样的博弈有纯战略纳什均衡）。

下面的结论给出了纳什均衡的一个非常重要的性质，它在计算均衡时很有用。

■**引理 33.2** 令 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 为一有限战略博弈。那么 $\alpha^*\in\times_{i\in N}\Delta(A_i)$ 为 G 的一混合战略纳什均衡，当且仅当对每个参与人 $i\in N$，α_i^* 的支集上的每个纯战略是对 α_{-i}^* 的最优反应。

证明：先假定在 α_i^* 的支集中有一个行动 a_i，它不是 α_{-i}^* 的最优反应。接着由 U_i 在 α_i 中的线性性质（参看(32.2)）参与人 i 可通过从 a_i 向一个最优反应行动转移概率来增加他的支付；因此 α_i^* 不是对 α_{-i}^* 的最优反应。

接着假定有一混合战略 α_i' 提供的期望支付高于 α_i^* 对 α_{-i}^* 的反应支付。接着再由 U_i 的线性至少有一 α_i' 支集上的行动一定能比 α_i^* 支集上的行动提供更高的支付，因此并不是 α_i^* 支集上所有行动都是 α_{-i}^* 的最优反应。 □

34

从而有:在任一个参与人的均衡混合战略支集中的每个行动都使该参与人产生同样支付。

如果某个参与人的行动集合不是有限的,那么结论就需要修改。在此情形下,α^*是G的一个混合战略纳什均衡当且仅当(ⅰ)对于每个参与人i在给定α^*_{-i}的条件下没有A_i中的任何行动产生对参与人i的支付超过他的均衡支付,并且(ⅱ)在给定α^*_{-i}条件下,产生小于他的均衡支付的行动集合有α_i^*——零测度。

请注意参与人的偏好可用期望支付函数来表示这一假设对这些混合战略均衡的特征具有重要意义。对于别的一些不确定性下的决策理论,这些结论不一定都有。

3.1.2 例

下面这个例子说明一个人如何能找到有限博弈的混合战略纳什均衡。

◇例 34.1 (BoS)考虑博弈 BoS,见图 35.1 上部分。在第 2 章我们将此表中参与人i的支付解释为代表了参与人i对(纯)结果集合的偏好。这里,给定我们在混合战略均衡中的兴趣,我们将支付解释为 v-N-M 效用。

正如我们以前所说明的那样,该博弈有两个(纯)纳什均衡,(B,B)和(S,S),这里$B=Bach$及$S=Stravinsky$。假定(α_1,α_2)是一个混合战略纳

35 什均衡。若$\alpha_1(B)$为 0 或 1,我们就获得两个纯纳什均衡,若$0<\alpha_1(B)<1$,那么在给定α_2条件下,由引理 33.2 参与人 1 的行动B和S必定产生同一支付,这样我们一定有:$2\alpha_2(B)=\alpha_2(S)$,这样有$\alpha_2(B)=\frac{1}{3}$。因为$0<\alpha_2(B)<1$则可有同样结论,那参与人 2 的行动B和S一定产生同一支付,因此$\alpha_1(B)=2\alpha_1(S)$,或$\alpha_1(B)=\frac{2}{3}$。这样该博弈的惟一非退化混合战略纳什均衡是$((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3}))$。

在此博弈的混合扩展中建立参与人最优反应函数是富有启发性的。如果$0\leqslant\alpha_2(B)<\frac{1}{3}$,那么参与人 1 的惟一最优反应$\alpha_1$有$\alpha_1(B)=0$,如果$\frac{1}{3}<\alpha_2(B)\leqslant 1$,那么她的惟一最优反应有$\alpha_1(B)=1$;如果$\alpha_2=\frac{1}{3}$,那么,如我们前面所见,她所有混合战略都是最优的。对参与人 2 作一个类似的计算我们得到图 35.1 下半部所示的函数。

	Bach	Stravinsky
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

图35.1 战略博弈BoS(上半部)和该博弈混合扩展中的参与人最优反应函数(下半部)。参与人1的最优反应函数由虚线表示;参与人2的则由实线表1示。小圆盘表示两个纯战略纳什均衡及混合战略纳什均衡

?练习35.1 猜均值(Guess the average) n 个人中的每一个人都说出集合$\{1,\cdots,K\}$中的一个数。美元奖金在他们中说出的数字离这些数字均值的$\frac{2}{3}$最近的人之间平分。试证明该博弈有惟一一个混合战略纳什均衡,其中每个参与人的战略是纯的。

?练习35.2 **投资竞赛**(An investment race)两个投资者处在一场奖金为1元的竞赛中。每个投资者可花费区间[0,1]中的任何一个数量。胜者是花费最多的投资者,在平局的情况下每个投资者得到奖金0.5元。试将此情形系统地表示成一个战略博弈并且找到它的混合战略纳什均衡。(注意参与人的支付函数是不连续的,这样Glicksberg的结论就不能用,不过该博弈有一混合战略纳什均衡。)

36

在第2.5节我们定义并研究了严格竞争博弈。我们说明了(命题22.2)在任一个具有纳什均衡的严格竞争战略博弈中均衡集合是与最大最小化行动二元组集合相一致的。这一事实可被用来寻找混合扩展是严格竞

争的博弈的混合战略纳什均衡集合。(请注意这样的事实:一个博弈是严格竞争的并不意味着它的混合扩展是严格竞争的。为说明这点,可以考虑有三个可能结果果 a^1, a^2 和 a^3 的博弈。这样我们可有 $a^1 \succ_1 a^2 \succ_1 a^3$ 和 $a^3 \succ_2 a^2 \succ_2 a^1$,因此博弈是严格竞争的。但是两个参与人可能都对 a^2 的偏好优于对 a^1 和 a^3 以同样概率发生的不确定事件的偏好,所以它的混合扩展不是严格竞争的。)

⍰练习 36.1 猜对(Guessing right)参与人 1 和 2 每人选择集合 $\{1, \cdots, K\}$ 中的一个元素。若两个参与人选择同一个数则参与人 2 付给参与人 1 一元钱;否则不需付钱。每个参与人最大最小化他的期望货币支付。试找出这个(严格竞争的)博弈的混合战略纳什均衡。

⍰练习 36.2 空袭(Air Strike)A 军有一架飞机,用它可摧毁三个可能目标中的任一个。B 军有一门防空高炮,它能放在三个目标中的任一个里面。目标 k 的值为 v_k,且有 $v_1 > v_2 > v_3 > 0$。只要目标不设防且 A 去打击它,则该目标就可被摧毁。A 军希望最大化损失的期望值而 B 军希望最小化它。试将此情形系统地表示成一个(严格竞争的)战略博弈并找到它的混合战略纳什均衡。

⍰练习 36.3 试证明如下数学结论,我们将在练习 64.2 中应用它。对任何 $\mathbb{R}^k$ 上的两个紧凸子集 X 和 Y,存在 $x^* \in X$ 和 $y^* \in Y$ 满足对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 有 $x^* \cdot y \leqslant x^* \cdot y^* \leqslant x \cdot y^*$。[证明这个结论你既可以求助于在战略博弈中纳什均衡存在性(命题 20.3),也可以通过以下的基本证明(它可避免 Kakutani 不动点定理的盲目使用。)令 (x^k), (y^k) 各为 X 和 Y 上的稠密序列,并且对每个正整数 n 考虑每个参与人有 n 个行动和参与人 i 的支付函数由 $u_1(i, j) = x^i \cdot y^j$ 给定的严格竞争博弈,使用命题 33.1 及 22.2]。

37

3.2 关于混合战略纳什均衡的解释

在这部分我们讨论一些关于混合战略均衡的解释。一些观点我们并不赞成,仅代表我们中某一位观点的段落由该作者姓名中首个大写字母引导。

3.2.1 混合战略作为选择的目标

从朴素的观点看，通过参与人给他们的行为引进随机性，一个混合战略便产生了一个深思熟虑的决策：一个选择混合战略的参与人使他自己致力于一个随机方法，该方法就是随机地选择他的行动集合的元素。在所有参与人这样做后，方法就被实行了，同时一个行动组合也就实现了。这样每个参与人 i 选择了 $\Delta(A_i)$ 中的一个元素，其方式类似于我们在第2章所讨论的战略博弈中选择 A_i 中的一个元素。

当然有很多参与人将随机性引进他们行动的情形。例如，参与人在扑克牌游戏中随机地"虚张声势"，政府随机地稽核纳税人，一些商店随机地提供折扣等。

AR 在战略博弈中混合战略均衡这一概念并没有抓住参与人将随机性引进他们行动的动机。一般地参与人深思熟虑地去随机化是为了影响别的参与人的行动。例如考虑孩子式的猜迷博弈（例17.1），在其中参与人选择是出单数手指还是出双数手指。这个博弈被经典地用来说明混合战略均衡这一概念的动机，但是随机化是关于博弈中参与人深思熟虑战略的奇怪描述。参与人的行动是对别人选择的猜测的反应；猜是种极精细而非随机的心理活动。另外，可考虑另一个说明混合战略均衡动机的例子，即征税当局与纳税人间的关系。当局的目的是阻止纳税人逃税，成本方面的考虑导致他们只能随机地稽核。他们希望纳税人知道他们的战略并且他们对是否稽核的战略并非无差别，就如同在一个混合战略均衡中所要求的那样。该情形应建成一个这样的博弈模型：当局首先选择稽核的概率，接着纳税人被告知这一概率而去采取行动。在这样一个模型里可能随机化集合是纯战略集合。

MJO 将参与人的均衡混合战略解释为一个深思熟虑的选择，其主要问题是在一个混合战略均衡中，每个参与人对所有支集为她的均衡战略的子集的混合战略偏好一致：给定别的参与人的均衡行为，她的均衡战略只是众多使她获得相同预期支付战略中的一个。不过，这个问题不仅仅限于混合战略均衡。例如，它困扰着很多序贯博弈（包括所有重复博弈）中的均衡，在这些均衡里参与人对她的均衡战略和对很多非均衡战略偏好一致。进一步来说，在一些博弈里可能还有别的选择均衡混合战略的理由。例如，在严格竞争博弈中，我们已经看到一个均衡混合战略可以严格地最大化参与人能保证获得的支付。（例如在猜谜博弈便是如此）。最后，Harsanyi(1973)的 38

巧妙证明多少摆脱了均衡混合战略的这一特征。

MJO 看起来猜谜混合战略均衡似乎提供了一个关于与随机挑选的对手重复进行博弈的参与人的稳定状态行为的极好描述。此情形下，在任何一次交锋中参与人都没有猜测对手行动的方法，这样对她来说采用“最大化她能保证获得的支付”这一战略便是合理的。若两个参与人重复相互影响则猜测的心理可能会提供对他们行为的洞察力，尽管即使此情形下战略的混合战略均衡可以提供对他们行为的极好描述。税收稽核情形同样能被模化成参与人的选择是同时进行的战略博弈。此博弈中由当局选择的均衡稽核概率与当局首先行动的博弈是一样的，给定纳税人的行为，当局对稽核与否的偏好是一样的。

3.2.2 混合战略纳什均衡作为稳定状态

39 在第 2 章我们将纳什均衡解释为这样一种情形的稳定状态：参与人重复行动并且忽略任何存在于行动间的战略联系。类似地我们能将一个混合战略纳什均衡解释为一个随机稳定状态。参与人拥有过去行动被采用频率的信息(如“参与人作为参与人 1 的角色在 80％的时间采取行动 a_1，20％的时间采用行动 b_1”)，每个参与人使用这些频率信息去形成他的关于别的参与人未来行动的信念，因此可以系统表达他的行动。在均衡中这些频率随时间保持不变并且在这样的意义下是稳定的：给定稳定状态信念，由参与人用正概率选择的任何行动是最优的。

混合战略均衡预示着博弈的结果是随机的，所以对博弈的单个行动来说它的预测比纯战略均衡的预测精确性差。但正如我们在第 1.5 节所讨论那样，理论的作用是用来解释规则的；混合战略均衡的概念抓住了随机规则。

此解释的一个变形建立在将一个 n 个参与人的博弈解释为一个 n 个大总体相互作用模型的基础上。在 n 个参与人被逐个从每个总体随机抽出来后，博弈的每个事件就发生了。在参与人 i 的均衡混合战略中的概率被解释为 A_i 中的元素在第 i 个总体中被使用的稳定状态概率。在这个解释下博弈就是模型的一种简化形式；其中总体被明确描述。

隐含于稳定状态解释之下的一个解释是：没有任何参与人看出存在于别的参与人行动间的或是存在于别的参与人行动与他自己行动间的任何联系。放弃这一假设将形成相关均衡概念，我们将在第 3.3 节讨论它。

3.2.3 混合战略作为扩展博弈的纯战略

在选择他的行动前，一个参与人可能收到他的行动或许要依赖的随机个人信息，从别的参与人的观点看，这些信息并不重要。参与人可能不会有意识地选择利用这种存在于他的行动与他得到的个人信息间的联系，这种联系也许仅是使他的行动被其他的参与人或外部观察者看来似乎是"随机的"。在把参与人的行为模化为随机的过程中，混合纳什均衡抓住了有关参与人视作不相关因素方面的行为依存关系。换言之，参与人可能知道决定他对手行为的外部因素，但是又可能发现要确定这种关系是不可能的或是成本极大的。（出于同样的理由，我们将掷币结果模化成随机的，而不将它描述成以下因素相互作用的结果：它的起始位置和速度，风速及其他因素等）。简言之，从这个方式来看混合战略纳什均衡是对系统稳定状态的描述，这个系统反映了博弈初始描述所缺失的元素。 40

为了更具体形象，让我们来考虑博弈 BoS(例 34.1)。如我们原来所知，此博弈有一个混合战略纳什均衡$((\frac{2}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3}))$。现在假设每个参与人有三种由他所不知的因素确定的"心情"。每个参与人在每个心情里呆 1/3 时间，并与别的参与人心情无关；他的心情不影响他的支付。假设：无论在心情 1 还是在心情 2，参与人 1 选择 Bach，当在心情 3 时选择 Stravinsky；在心情 1 参与人 2 选择 Bach，在心情 2 或心情 3 下选择 Stravinsky。将此情形视为每个参与人三种类型对应于他的可能心情的贝叶斯博弈，则此行为确定了一个恰与原始 BoS 博弈的混合纳什均衡相对应的纯战略纳什均衡。请注意这个混合战略均衡的解释不依赖于每个参与人具有三个相同可能性的且独立的心情，我们仅需要参与人个人信息满足它们能产生恰当的随机变量。不过，对这种信息结构存在的要求限制了解释。

AR 关于该解释有三个批评意见。首先，参与人深思熟虑的行动依赖于不影响他支付的因素是很难接受的。人们通常为他们的选择给出理由；在任何特定情形下，希望应用混合战略均衡概念的建模者(modder)都应该指出支付不相关的理由及解释参与人个人信息与他的选择间所需要的依存关系。

MJO 混合战略均衡中每个人对她的均衡战略支集上的所有行动具有相同偏好，所以说选择的行动依赖于被建模者认为"不相关的"因素不是没道理的。当被问到他们为什么从每个元素都一样具有吸引力的集合中选定

一个行动，人们经常给出诸如"我不知道——我只是觉得喜欢它"之类的答案。

AR 其次，此种解释下由均衡所预测的行为是非常脆弱的。如果一个经理的行为是由他所吃早餐的类型决定的，那么模型之外的种种因素，例如他的饮食习惯或鸡蛋价格的变化，都可能改变他用于选择他行动的概率，这样就会导致关于别的参与人概率的变化及造成不稳定性。

MJO 对于随机事件的每个结构都有一个导致同一均衡的行动模式。41 例如，如果在鸡蛋价格上涨前有一个均衡，在此均衡里经理在早餐吃鸡蛋及早上 7:30 前起床的日子里提供折扣；那么在价格上涨之后可能有这样的均衡，即经理当她吃鸡蛋和上午 8:00 以前起床时才提供折扣。在价格改变之后她原有的行为模式对别的参与人的战略就不再是最优反应；系统是否在一个稳定的方式下调节到一个新均衡依赖于调节过程。一个混合战略纳什均衡在下列的意义下是脆弱的：参与人没有正面激励去坚持他们均衡行为模式（因为均衡战略并不是惟一最优的）；除此之外，在此解释下的均衡不比在任何别的解释下更脆弱。（再一次指出，这是一个由 Harsanyi 模型所阐述的问题，将在下节讨论。）

AR 最后，为了用这种方式去解释一个特定问题的均衡，就需要去指出"真实生活"以外的变量，参与人将他们的行为建立在这些变量之上。例如，为了解释价格竞争模型中的混合战略纳什均衡，人们就应该既要具体指出模型中没有的，但又要作为公司制定价格政策基础的各因素，又要指出信息结构足够丰富使它能跨越所有混合战略纳什均衡集合。这些应用混合战略均衡概念的人很少这样做。

MJO 世上的参与人能见到众多她的行动可依赖的随机变量：她早上起床的时间，她所处的心情，她的报纸被送来的时间，……这些随机变量的结构是如此丰富以至于不必要在每个理论应用中将它们写出来。为了更好地将一个更大博弈中的混合战略解释为纯战略就应该抓住这样的思想，即参与人选择的行动可能依赖于模型之外的因素。

3.2.4 混合战略作为不确定化博弈中的纯战略

对由 Harsanyi(1973)提出的混合战略均衡，我们现在提出一个理论根 42 据。若在一个博弈中参与人的偏好服从于一个小随机变化，则该博弈视为一种经常发生的情形。（这样，如同在前面部分讨论的那样，随机因素被引进了，但这里它们是与支付不相关的。）在情形的每次发生中，每个参与人知

道他自己的偏好而不知其他参与人的偏好。一个混合战略均衡就是对参与人随时间选择他们行动频率的一个概括。

令 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 为一有限战略博弈，$\epsilon=(\epsilon_i(a))_{i\in N,a\in A}$ 为区间 $[-1,1]$ 中随机变量的一个族，这里 $\epsilon_i=(\epsilon_i(a))_{a\in A}$ 有一个连续可微的密度函数和一个绝对连续的分布函数，并且随机向量 $(\epsilon_i)_{i\in N}$ 是独立的。考虑一组不确定化博弈，其中每个参与人 i 对结果 a 的支付服从小随机变化 $\epsilon_i(a)$，每个参与人 i 知道 ϵ_i 的实现值(realization)为 $(\epsilon_i(a))_{a\in A}$，但不知道别的参与人随机变量的实现情况。这样，可考虑贝叶斯博弈 $G(\epsilon)$，其中自然状态集合为 ϵ 所有可能实现值的集合，每个参与人的(共同)先验概率是由 ϵ 确定的概率分布，参与人 i 的信号函数仅告诉他 $(\epsilon(a))_{a\in A}$ 的实现情况及参与人在结果为 a 和状态为 ϵ 情况下他的支付是 $u_i(a)+\epsilon_i(a)$。(请注意每个参与人有无限多类型。)

Harsanyi 的主要结论(1973，定理2和7)是：对几乎任一博弈 G 和任一满足上述条件的随机变量族 ϵ^*，几乎任一 G 的混合战略纳什均衡都是与某个极限相联系的混合战略组合，而该极限为贝叶斯博弈 $G(\gamma\epsilon^*)$ 的纯战略均衡序列，随不确定性的大小，γ 逐渐消失的极限，当然 $G(\gamma\epsilon^*)$ 应满足对于 $G(\gamma\epsilon^*)$ 中的每个博弈而言由每个类型的参与人所选择的行动都是严格最优的。进一步来说，任何这种收敛序列的极限都与 G 的一个混合战略均衡相联系(Harsanyi(1973，定理5))。也就是，当支付中的随机变化小的时候，博弈 G 的几乎任一混合均衡都接近于相联系的贝叶斯博弈的纯均衡，反之亦然。我们称具有这种性质的 G 的混合战略均衡在 ϵ^* 下是**可逼近的**(approachable)(由于与这些结论相关的数学的复杂性，我们没引进证明。)

?练习 42.1　考虑两个参与人的博弈，其中每个参与人 i 有两个纯战略 a_i 和 b_i。对 $i=1,2$，令 δ_i 为独立的随机变量，δ_i 具有 $[-1,1]$ 上的同一分布，并且对 $i=1,2$ 和 $a\in A$，令随机变量 $\epsilon_i(A)$ 具有性质：对 $x=a_2,b_2$，有 $\epsilon_1(a_1,x)-\epsilon_1(b_1,x)=\delta_1$ 和对 $x=a_1,b_1$，有 $\epsilon_2(x,a_2)-\epsilon_2(x,b_2)=\delta_2$

43

a. 试证明在 ϵ 下 BoS(例 15.3)的所有均衡都是可能接近的。

b. 对于 $u_i(a_1,a_2)=1(i=1,2)$ 和所有其他支付为 0 的博弈，试证明只有纯战略纳什均衡 (a_1,a_2) 在 ϵ 下是可逼近的。

c. 对于 $u_i(a)=0(i=1,2$；所有的 $a\in A$ 的博弈，试证明仅有混合战略纳什均衡 α 在 ϵ 下是可逼近的。其中：对 $i=1,2$，$\alpha_i(a_i)=\alpha_i(b_i)=\frac{1}{2}$。

(别的均衡在别的不确定性下是可逼近的。)

这样 Harsanyi 对混合战略均衡的理论根据是:即使没有参与人根据需要的频率去使用他的纯战略,支付函数中的随机变化也会导致每个参与人根据正确的频率去选择他的纯战略。别的参与人的均衡行动使得自己支付函数的每个实现值选择惟一最优纯战略的参与人根据他的均衡混合战略所需的频率来选择他的行动。

MJO Harsanyi 的结论是对下列断言的极好反应:因为参与人对所有具有相同支集的战略无偏好差别,所以她没有理由去选择她的均衡混合战略。在上面我们已论证了对一些博弈,(包括严格竞争博弈)这个批评是中肯的。因为参与人有别的理由去选择他们的均衡混合战略。Harsanyi 的结论表明,在几年中任一个博弈批评的力量都是有限的,因为几乎任一混合战略纳什均衡都接近于博弈任一不确定化的一个严格纯战略均衡,其中参与人支付服从小随机变化。

3.2.5 混合战略作为概率

在另一种解释下(这种解释在第 5.4 节我们将仔细分析),一个混合战略纳什均衡是一个概率(beliefs)组合 β,在 β 中 β_i 是所有其他参与人关于参与人 i 的行动的**共同**(common)信念。β_i 的性质是,对每个参与人 i,在给定 β_{-i}条件下,每个 β_i 支集上的行动都是最优的。在此解释下,每个参与人都选择一个单一行动而非一个混合战略。均衡是参与人概率的稳定状态,而不是他们行动的稳定状态。这些信念需满足两个性质:在所有参与人中它们是共同的,并且与每个参与人是一个期望效用最大化者的假设相一致。

若欲从此思想出发,我们将形成如下的均衡概念:

44 ▶定义 44.1 一个有限战略博弈的**混合战略纳什均衡**是混合战略组合 α^*,α^* 满足:对每个参与人 i,α_i^* 支集上的每个行动都是对 α_{-i}^*的最优反应。

引理 33.2 表明了该定义等同于我们以前的定义(32.3),并且这也保证了该思想的确是对混合战略均衡的一个解释。

不过,请注意,当我们用这种方式来解释混合战略均衡时,均衡的预测内容是少的:它仅预测了每个参与人使用一个对均衡概率反应最优的行动。这些最优反应集合包括了在参与人均衡混合战略支集上的任何行动,甚至

也可能包括在战略的支集之外的行动。

3.3 相关均衡

在第3.2.3节我们讨论了将一个混合战略纳什均衡解释成一个稳定状态，在此状态中每个参与人的行动依赖于他从“自然”收到的一个信号。在此解释中信号是私有的，也是独立的。

若信号不是私有的和独立的又会怎样呢？例如，假设在BoS（见图35.1）中两个参与人都观察到一个随机变量，该随机变量以概率$\frac{1}{2}$取x值或y值。这样就有一个新均衡，在均衡中若实现值为x，则两个参与人都选Bach，若实现值为y，则选Stravinsky。给定每个参与人的信息，他的行动是最优的：如果实现值为x，那么他知道别的参与人选择Bach，所以对他来说选Bach是最优的，若实现值为y则有对称结果。

此例中参与人观察到同一随机变量。更一般地，他们的信息可能并非完全相关。例如假设有一随机变量可取三个值x，y和z，参与人1仅知道实现值要么为x要么为$\{y,z\}$中的一个，而参与人2仅知道它要么为$\{x,y\}$中的一个，要么为z。也就是，参与人1的**信息分割**是$\{\{x\},\{y,z\}\}$，参与人2的是$\{\{x,y\},\{z\}\}$。在这些假设下，参与人1的一个战略包括两个行动：一个是当她知道实现值为x所采取的；另一个是当她知道实现值为$\{y,z\}$中的一个所采取的。同理，参与人2的一个战略包括两个行动：一个对$\{x,y\}$，另一个对z。在下列条件下，一个参与人的战略是最优的，即给定其他参与人的战略，对于他得到的全部信息，他选择任一个不同于由他的战略所决定的行动，他都不能做得更好。为了说明一个参与人在选择最优行动时如何利用他的信息，假定y和z的概率为η和ζ并且参与人2的战略是：若他知实现值在$\{x,y\}$中，则他选择行动a_2，若他知道实现值是z则采取行动b_2，那么如果参与人1知道y或z中的某个已发生了，则在给定参与人2以概率$\eta/(\eta+\zeta)$（以$\{y,z\}$为条件的y的概率）选择a_2及以概率$\zeta/(\eta+\zeta)$选择b_2的条件下参与人1选择最优行动。 45

这些例子使我们有下列均衡的概念。

▶定义45.1 一个**战略博弈**$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的**相关均衡**包括

• 有限概率空间(Ω,π)（Ω是状态集合，π是Ω上的一个概率测度）

• 对每个参与人$i\in N$，Ω的一个分割$\mathcal{P}_i$（参与人i的**信息分割**(information partition)）

• 对每个$i\in N$，函数$\sigma_i:\Omega\to A_i$，满足对某个$P_i\in\mathcal{P}_i$，只要$\omega\in P_i$，$\omega'\in P_i$，则有$\sigma_i(\omega)=\sigma_i(\omega')$（$\sigma_i$是参与人$i$的战略）

这样对每个$i\in N$及每个函数$\tau_i:\Omega\to A_i$，该函数满足对某一$P_i\in\mathcal{P}_i$。（即对参与人i的每个战略）只要$\omega\in P_i$及$\omega'\in P_i$，则有$\tau_i(\omega)=\tau_i(\omega')$，我们有：

$$\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)u_i(\sigma_{-i}(\omega),\sigma(\omega))\geqslant\sum_{\omega\in\Omega}\pi(\omega)u_i(\sigma_{-i}(\omega),\ \tau_i(\omega)).\tag{45.2}$$

请注意概率空间和信息分割不是外来的而是均衡的组成部分。同时也要注意(45.2)等同于这样的必要条件：给定别的参与人的战略和参与人i关于ω的知识，对以正概率发生的每个状态ω行动$\sigma_i(\omega)$是最优的。（这个等价依赖于参与人的偏好服从期望效用理论的假设。）

我们先说明相关均衡集合包括混合战略纳什均衡集合。

■命题 45.3　一个有限战略博弈$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的每一个混合战略纳什均衡$\alpha$都有一个相关均衡$\langle(\Omega,\pi),(\mathcal{P}_i),(\sigma_i)\rangle$，其中对每个参与人$i\in N$由$\sigma_i$导致的$A_i$上的分布是$\alpha_i$。

46　证明：令$\Omega=A(=\times_{j\in N}A_j)$并且由$\pi(a)=\Pi_{j\in N}\alpha_j(a_j)$定义$\pi$。对每个$i\in N$和$b_i\in A_i$令$P_i(b_i)=\{a\in A:a_i=b_i\}$且令$\mathcal{P}_i$包含$|A_i|$个集合$P_i(b_i)$。对每一$a\in A$由$\sigma_i(a)=a_i$定义$\sigma_i$。那么$\langle(\Omega,\pi),(\mathcal{P}_i),(\sigma_i)\rangle$是一相关均衡，因为(45.2)对每一战略$\tau_i$都满足：左边是参与人$i$在混合战略纳什均衡$\alpha$中的支付，右边是当他使用以概率$\alpha_i(a_i)$选择行动$\tau_i(a)$的混合战略和别的参与人$j$使用混合战略$\alpha_j$时他的支付。进一步说，由$\sigma_i$导致的$A_i$上的分布是$\alpha_i$。□

下面的例子是对本部分开篇例子的正式表示。

◇例 46.1　BoS 中（例 34.1）三个混合战略纳什均衡支付组合是(2,1)，(1,2)和$(\frac{2}{3},\frac{2}{3})$。并且某个相关均衡产生支付组合$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$：令$\Omega=$

$\{x,y\}$，$\pi(x)=\pi(y)=\frac{1}{2}$，$\mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2=\{\{x\},\{y\}\}$，$\sigma_i(x)=$ Bach 且 $\sigma_i(y)=$ Stravinsky$(i=1,2)$。这个均衡的一个解释是参与人观察一个当面掷币的结果，它决定了他们所博弈的均衡是两个纯战略纳什均衡中的哪一个。

这个例子表明了下面的结论：

■命题 46.2　令 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 为一战略博弈。G 的相关均衡支付的任一凸组合仍是 G 的一个相关均衡支付。

证明：令 $u^1,\cdots,u^K$ 为相关均衡支付组合且令 $(\lambda^1,\cdots,\lambda^K)\in\mathbb{R}^K_+$ 对所有 k 有 $\lambda^k\geqslant 0$ 且 $\sum_{k=1}^{K}\lambda^k=1$。对 k 的每个值令 $\langle(\Omega^k,\pi^k),(\mathcal{P}_i^k),(\sigma_i^k)\rangle$ 为一产生支付组合 u^k 的相关均衡；不失一般性假设集合 Ω^k 是不相交的。则下述内容便定义了一个支付组合为 $\sum_{k=1}^{K}\lambda^K\mu^k$ 的相关均衡：令 $\Omega=U_k\Omega^k$，且对任一 $\omega\in\Omega$ 由 $\pi(\omega)=\lambda^k\pi^k(\omega)$ 定义 π，这里 k 满足 $\omega\in\Omega^k$。对任一 $i\in N$，令$\mathcal{P}_i=U_k\mathcal{P}_i^k$且由 $\sigma_i(\omega)=\sigma_i^k(\omega)$ 定义 σ_i，这里 k 使得 $\omega\in\Omega^k$。□

我们可将本证明中构造的相关均衡解释如下：首先一个公共随机方法决定 K 个相关均衡中哪一个将被形成，接着与第 k 个相关均衡相对应的随机变量被实现。

◇例 46.3　考虑图 47.1 左边的博弈：纳什均衡支付组合是(2，7)和(7，2)(纯的)和$(4\frac{2}{3},4\frac{2}{3})$(混合的)。下列的相关均衡产生一个位于这三个组合凸包之外的支付组合。令 $\Omega=\{x,y,z\}$ 和 $\pi(x)=\pi(y)=\pi(z)=\frac{1}{3}$，令参与人 1 的分割为$\{\{x\},\{y,z\}\}$和参与人 2 的为$\{\{x,y\},\{z\}\}$。将战略定义如下：$\sigma_1(x)=B$ 及$\sigma_1(y)=\sigma_1(z)=T$；$\sigma_2(x)=\sigma_2(y)=L$ 及$\sigma_2(z)=R$。(选择与状态间相关关系如图 47.1 右边所示。)在给定参与人 2 的行动下参与人 1 的行动是最优的：在状态 x，参与人 1 知道若参与人 2 采用 L 则对她来说采用B 是最优的，在状态 y 和z，若她给参与人 2 采用 L 和 R 赋同样概率，则对她来说采用 T 是最优的，对称地，给定参与人 1 的行动，参与人 2 的行动也是最优的，因此我们有一个相关均衡，支付组合是(5，5)。

47

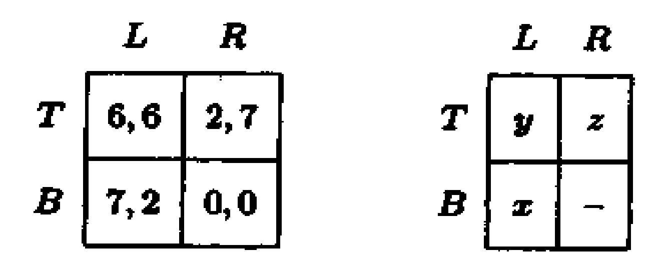
这个例子中我们能用结果的集合确定状态的集合，表明了下列结论。

■命题 47.1　令 $G=\langle N,(A_i),(u_j)\rangle$ 为一有限战略博弈。在 G 的一

个相关均衡中所能获得的结果上的每一个概率分布都能在这样的一个相关均衡中获得，即状态集合为 A 并且对每个 $i \in N$ 参与人 i 的信息分割包括(对某个行动 $b_i \in A_i$)所有形式为 $\{a \in A : a_i = b_i\}$ 的集合。

证明：令 $\langle(\Omega, \pi), (\mathcal{P}_i), (\sigma_i)\rangle$ 为 G 的一相关均衡。那么，$\langle(\Omega', \pi'), (\mathcal{P}_i'), (\sigma_i')\rangle$ 也是一个相关均衡，这里 $\Omega' = A$。对每个 $a \in A$ 有 $\pi'(a) = \pi(\{\omega \in \Omega : \sigma(\omega) = a\})$，$\mathcal{P}_i'$ 包括类型 $\{a \in A : a_i = b_i\}$(对某个 $b_i \in A_i$)的集合，并且 σ_i' 由 $\sigma_i'(a) = a_i$ 所确定。 □

这个结论让我们在计算相关均衡支付时把注意力集中到状态集合是结果集合的均衡。不过要注意这一均衡可能无自然的解释。



	L	R
T	6,6	2,7
B	7,2	0,0

	L	R
T	y	z
B	x	–

图 47.1 相关均衡的一个例子。左边为一个战略博弈。右边的表格作为一个博弈相关均衡的状态的函数给出了参与人的选择

48

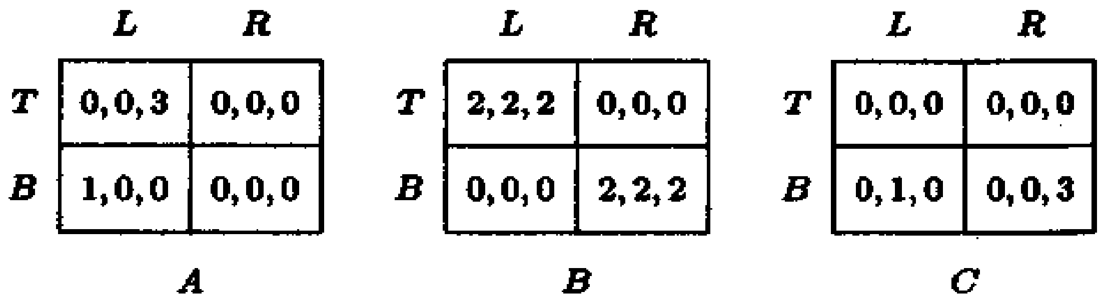
在相关均衡的定义中我们假定了所有参与人具有关于状态发生概率的共同信念。如果有一个参与人持不同信念的随机变量，则附加的均衡支付组合是可能的。假定参与人 1 确信在某些比赛里队 T_1 将击败队 T_2，而参与人 2 确信队 T_2 将赢！那么就有 BoS(例 34.1)的一个均衡：若 T_1 赢则结果为(Bach, Bach)，若 T_2 赢则结果为(Stravinsky, Stravinsky)，它给每个参与人一个期望支付 2！(第 5.3 节我们将说明：如果两个参与人有同样的先验概率则他们的信念如我们假设那样相异就不可能是参与人间的共同知识了。)

☒ 练习 48.1　考虑由图 48.1 给定支付的三人博弈。(参与人 1 选择两行中的某行，参与人 2 选择两列中的某列，参与人 3 选择三表中的某表。)

a. 试证明纯战略均衡支付是(1,0,0)，(0,1,0)，和(0,0,0)。

b. 试证明有一个这样的相关均衡：参与人 3 选择 B，参与人 1 和 2 以同样概率选择(T, L)和(B, R)。

c. 解释如下涵义：参与人 3 宁愿不去拥有参与人 1 与参与人 2 用于协调他们行动的信息。



A:

	L	R
T	0,0,3	0,0,0
B	1,0,0	0,0,0

B:

	L	R
T	2,2,2	0,0,0
B	0,0,0	2,2,2

C:

	L	R
T	0,0,0	0,0,0
B	0,1,0	0,0,3

图 48.1 一个三人博弈。参与人1选择两行中的某一行，参与人2选择两列中的某一列，参与人3选择三个表中的某一表

3.4 演进均衡

本部分我们讨论隐含在被称为演进均衡(evolutionary equilibrium)的一种纳什均衡概念变形之中的基本思想。这个概念被设计用来对参与人的行动是由演进的力量所决定的情形建模。我们将讨论限于一种简单情形，在其中有机体(动物、人类、植物，……)单个总体的成员们两两相互作用。在每个竞争中每个有机体从集合 B 中选取一个行动。有机体不是有意识地选择行动，而是他们要么从他们的先辈那里继承行为模式，要么由变异赋给他们。我们假设有一函数 u 测度每个有机体的生存能力：如果一个有机体面对它的潜在对手总体中的行动分布 β 它选择行动 a，那么它的生存能力由 β 下的期望 $u(a,b)$ 来测度。这个描述对应于一个两人对称战略博弈 $\langle\{1,2\},(B,B),(u_i)\rangle$，这里 $u_1(a,b)=u(a,b)$ 且 $u_2(a,b)=u(b,a)$。

演进均衡的一个备择解是 B 中的一个行动。均衡的概念是被设计用来抓住一个稳定状态，在其中所有有机体采取这个行动并且没有变异体侵入总体。更精确地说，该思想是对每个可能行动 $b\in B$ 进化过程有时会将总体的一小部分转变成采取行动 b 的变异体。在均衡中任何这样的变异一定获得一个比均衡行动的期望支付低的期望支付，因此它会消失。现在，如果总体的 $\epsilon>0$ 部分包含采取行动 b 的变异而所有其他有机体采取行动 b^*，则一个变异体的平均支付为 $(1-\epsilon)u(b,b^*)+\epsilon u(b,b)$(因为它以概率 $1-\epsilon$ 碰到一个非变异体而以概率 ϵ 碰到另一个变异体)而非变异体的平均支付是 $(1-\epsilon)u(b^*,b^*)+\epsilon u(b^*,b)$。因此对于 b^* 为一演进均衡我们要求：对所有 ϵ 充分小的值

$$(1-\epsilon)u(b,b^*)+\epsilon u(b,b)<(1-\epsilon)u(b^*,b^*)+\epsilon u(b^*,b)$$

此不等式是成立的当且仅当对每一 $b \neq b^*$，要么 $u(b,b^*) < u(b^*,b^*)$ 要么 $u(b,b^*) = u(b^*,b^*)$，且 $u(b,b) < u(b^*,b)$。由此我们可将演进均衡定义如下：

▶定义 49.1 令 $G = \langle \{1,2\},(B,B),(u_i)\rangle$ 为一对称战略博弈，这里对某一函数 u 有 $u_1(a,b) = u_2(b,a) = u(a,b)$。$G$ 的一个**演进稳定战略**(evolutionarily stable strategy)(ESS)是一个行动 $b^* \in B$，其满足 (b^*,b^*) 是 G 的一个纳什均衡且对于 b^* 的每个最优反应 $b \in B$ 且 $b \neq b^*$ 有 $u(b,b) < u(b^*,b)$。

在下列例子中，如在很多经典文献中一样，集合 B 被看作是某个有限行动集合上的混合战略集合。

◇例 49.2 鹰—鸽(Hawk - Dove)每时每刻一个总体中的动物都在成对为一个具有价值 1 的猎物而争斗。每只动物能像鸽子(D)或像鹰(H)一样行动。在竞争中如果两只动物都是鸽式的，则它们平分猎物的价值；如果都是鹰式的，则猎物的价值减少 c 且在它们间平分；如果有一个是鹰式的，另一个是鸽式的，则鹰式的得 1，鸽式的为 0。该博弈用图 50.1 表示，(若 $c>1$，则它有如图 17.2 的同样结构)，令 B 是 $\{D,H\}$ 上所有混合战略纳什均衡，在其中每个参与者使用战略 $(1-1/c, 1/c)$；该战略是惟一的 ESS。(特别地，在此情形中排除了鹰的总体不是进化稳定的。)若 $c<1$，博弈有惟一混合战略纳什均衡，在其中每个参与者使用纯战略 H；此战略是惟一的 ESS。

	D	H
D	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	$0,1$
H	$1,0$	$\frac{1}{2}(1-c),\frac{1}{2}(1-c)$

图 50.1 一个鹰—鸽博弈

从定义 49.1 立即可知如果 (b^*,b^*) 是一对称纳什均衡并且仅有 b^* 是对 b^* 的最优反应(即，(b^*,b^*) 是严格均衡)那么 b^* 是一个 ESS。一个非严格均衡战略可能不是一个 ESS：考虑两个参与人的对称博弈，其中每

γ,γ	$1,-1$	$-1,1$
$-1,1$	γ,γ	$1,-1$
$1,-1$	$-1,1$	γ,γ

图 50.2　无 ESS 的博弈。每个纯战略给变异体产生的支付高于惟一对称均衡混合战略

个参与人有两个行动且对所有$(a,b)\in B\times B$有$u(a,b)=1$。一个更有趣的非严格均衡战略不是 ESS 的例子，可考虑图 50.2 中的博弈，其中 B 包括在一个包含三个元素的集合上的所有混合战略且$0\leqslant\gamma\leqslant1$。该博弈有惟一对称混合战略纳什均衡，在均衡中每个参与人的混合战略是$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$；每个参与人的期望支付是 $\gamma/3$。使用三个纯战略中的任何一个的变异体，当它碰到一个非变异体时获得 $\gamma/3$ 的期望支付，而当它碰到另一个变异体时获得更高的期望支付 γ。因此均衡混合战略不是一个 ESS(从其可知不是每个有纳什均衡的博弈都有一个 ESS)。

51

?练习 51.1　试证明：在每两个参与人的对称战略博弈中，每个参与人有两个纯战略且对四个战略组合支付是不一样的，则该博弈有一个是 ESS 的混合战略。

[注解]

混合战略的现代系统表达应归于 Borel(1921；1924，pp.204—221；1927)。尽管这些思想至少可追溯到 18 世纪早期(参看 Guilbaud (1961)和 kuhn (1968))。Borel 创立了某些特别严格竞争博弈混合战略纳什均衡存在的理论，von Neumann(1928)证明了对所有严格竞争博弈都存在一个均衡。我们证明的存在性结论(命题 33.1)(它包含了所有有限战略博弈)应归于 Nash (1950 a，1951)。相关均衡的概念应归于 Aumann(1974)，他的论文同样也是第 3.3 节中另一内容的基础。进化稳定战略的思想应归于 Maynard Smith 和 Price(参看 Maynard Smith (1972))和 Maynard Smith and

Price (1973);也可参看 Maynard Smith (1974,1982)。

第 3.2.2 节提及的总体模型应归于 Rosenthal(1979)。在第 3.2.3 节讨论的将混合战略解释为扩展博弈中的纯战略思想和第 3.2.4 节的内容归于 Harsanyi(1973)。在第 3.2.5 节所给的关于混合战略纳什均衡的解释在 Aumann(1987a)中被讨论。在第 3.2 节给定的某些关于混合战略纳什均衡的批评摘录于 Rubinstein(1991)。第 3.3 节的例子应归于 Aumann(1974)。

我们对命题 33.1 的证明应归于 Nash(1950a),它求助了命题 20.3 而命题 20.3 的证明使用了 Kakutani 的不动点定理。Nash(1951)提供了命题 33.1 的另一个证明,该证明使用了更基本的 Brouwer 不动点定理,它应用了点值函数。

52 练习 35.1 中的博弈来源于 Moulin(1986,p.72)。练习 36.3 来源于 Arrow, Barankin, and Blackwell(1953)。

关于参与人的偏好不满足由效用函数所表示的必要假设时的混合战略纳什均衡的讨论参看 Crawford(1990)。我们在第 3.4 节所讨论的 ESS 概念已在很多方面被扩展了,请参看 Damme(1991, Chapter 9)。

我们并没阐述是否存在动态调整过程导致均衡这一问题。一个被称为**虚拟参与**(fictitious play)的这种过程,由 Brown(1951)一提出,最近又被重新考虑了。在这个过程中每个参与人经常选择一个对别的参与人过去行动统计频率的最优反应。Robinson(1951)说明了在任一严格竞争博弈中该过程收敛于一混合战略纳什均衡;Shapley(1964, Section 5)说明了在非严格竞争的博弈中它不必要是这样的。最近的研究关注于明确拥有进化及学习力的模型;对于这方面工作的介绍可参看 Battigalli, Gilli and Molinari (1992)。

第 4 章

可理性化和反复剔除劣行动[①]

本章我们考察在给定与下列观点相一致的信念条件下要求参与人的选择是最优的结果：每个参与人是理性的；每个参与人认为其他参与人是理性的，每个参与人认为其他参与人认为每个参与人是理性的，等等。

4.1 可理性化

在第 2、3 章我们讨论了战略博弈解的概念，在这些博弈中每个参与人的选择在给定他关于别的参与人行动的信念条件下都是最优的，且这种信念还必须是正确的。也就是，我们假定每个参与人知道别的参与人的均衡行动。如果参与人重复进入博弈所模化的情形，则他们能从他们所观察到的稳定状态行动中获得这一知识，不过如果博弈是瞬间事件，在其中所有参与人同时选择他们的行动，则每个参与人如何知道别的参与人的均衡行动是不清楚的；由于这个原因博弈论者们发展了解的概念，它不需引入那一假设。

本章我们研究一些这样的解的概念，即参与人关于每个其他人的行动的信念虽未被假设为正确的，但受理性思考的约束，每个参与人都相信由每个其他参与人所采取的行动都是对某一信念的反应。进一步说，每个参与人都假设其他参与人都用此公式推理，所以认为其他参与人都相信每个参与人的行动是对某一信念的最优反应，等等。

我们将要研究的解的概念弱于纳什均衡。实际上，在很多博弈中它们 54

① 原书作者认为本书中 dominated 应译为“被控的”，而不宜译为“劣的”。译者的这一译法仅供参考。——译者

不排除任何行动的采用。不过我们发现该方法的有趣之处在于，它利用了对于参与人知识假设的逻辑内涵，参与人的知识比那些前面章节所讨论的要少。

固定一战略博弈$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$（其中$u_i$的期望代表了参与人$i$关于$A=\times_{j\in N}A_j$（对每一$i\in N$）上不确定事件的偏好）。在本章中为了发展这一思想就不必假定每个参与人的行动集合A_i是有限的，尽管为了简单我们在某些讨论中采用这个假设。参与人i的一个信念(belief)（关于其他参与人行动的）是$A_{-i}(=\times_{j\in N\setminus\{i\}}A_j)$上的一个概率测度。注意这个定义允许参与人相信别的参与人的行动是相关的：该信念不必是每个行动集合A_j（对$j\in N\setminus\{i\}$）上的独立概率测度的乘积。同以前一样，在给定的信念下如果没有别的行动使参与人i获得更高支付，则参与人i的一个行动$a_i\in A_i$就是对该信念的一个最优反应(best response)。我们经常使用短语"参与人i认为某个别的参与人j是理性的"，这意味着：参与人i认为参与人j选择的任何行动都是对参与人j关于非j参与人行动信念的最优反应。

如果参与人i认为每个其他参与人j是理性的，则他必能将他的关于别的参与人行动的信念μ_i理性化如下：被信念μ_i赋给正概率的每个其他参与人j的任一行动都必定是对参与人j的信念的一个最优反应。如果参与人i进一步认为每个其他参与人j都认为每个参与人$h\neq j$（包括参与人i）是理性的，那么他（参与人i）必定对参与人j关于参与人h的信念的观念有看法。如果参与人i的推理有无限深度，我们就有下列定义：

▶定义 54.1　行动$a_i\in A_i$在战略博弈$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$中是**可理性化的**(rationalizable)。如果存在：

- 一个集合族$((X_j^t)_{j\in N})_{t=1}^{\infty}$，其中$X_j^t\subseteq A_j$（对所有$j$和$t$），
- 参与人i的一个信念μ_i^1它的支集是X_{-i}^1的一个子集，并且
- 对每一$j\in N$，每一$t\geq 1$和每一$a_j\in X_j^t$，参与人j的一个信念$\mu_j^{t+1}(a_j)$它的支集是X_{-j}^{t+1}的一个子集。

这样

- a_i是对参与人i集合μ_i^1的最优反应
- $X_i^1=\varnothing$和对每一个$j\in N\setminus\{i\}$集合X_j^1是所有$a'_j\in A_j$的集合；这样在μ_i^1的支集上有某一a_{-i}满足$a_j=a'_j$
- 对每个参与人$j\in N$和每个$t\geq 1$，每个行动$a_j\in X_j^t$是对参与人j的

信念$\mu_j^{t+1}(a_j)$的一个最优反应

• 对每一 $t\geqslant 2$ 和每一 $j\in N$ 集合 X_j^t 是所有 $a'_j\in A_j$ 的集合，这样有某个参与人 $k\in N\setminus\{j\}$，某一行动 $a_k\in X_k^{t-1}$ 和在 $\mu_k^t(a_k)$ 支集上的某个 a_{-k} 满足 $a'_j=a_j$。

注意在形式上本定义第2部分的第二、四条件是多余的，我们引进它们是为了使定义更紧密地与我们所给的动机相对应。同时也要注意我们引进族$((X_j^t)_{j\in N})_{t=1}^{\infty}$中的集合 X_i^1，只是为了简化概念，即使它被要求是空的，若$|N|\geqslant 3$ 则 X_i^1 是惟一这种多余集合，而若$|N|=2$ 就有很多了(对任一奇数 t 的 X_i^t 和对$j\neq i$，任一偶数 t 的 X_j^t)。

集合 X_j^1(对 $j\in N\setminus\{i\}$)被解释为：参与人 j 的由参与人 i 关于非 i 参与人行动的信念(它证明 i 选择 a_i 是有道理的)赋予正概率的行动组合。对任一 $j\in N$，X_j^2 的解释是：它是参与人 j 所有行动a_j 的集合，这样就至少存在某个参与人 $k\neq j$ 的一个行动$a_k\in X_k^1$，它由赋给 a_j 正概率的信念 $\mu_k^2(a_k)$证明为是有道理的。

为了说明该定义的意义，假设有三个参与人，他们中的每个人有两个可能行动 A 和 B。假设参与人1的行动 A 是可理性化的且参与人1在理性化中所使用的信念 μ_1^1 赋给参与人2和3的选择(A,A)或(B,B)正概率，则 $X_2^1=X_3^1=\{A,B\}$。参与人2的信念 $\mu_2^2(A)$和 $\mu_2^2(B)$证明他选择 A 和 B 影响参与人1和3的行动是有道理的；同样参与人3的信念 $\mu_3^2(A)$和 $\mu_3^2(B)$影响参与人1和2。这四个信念不一定都导致关于参与人1的同一信念，且不一定都赋正概率给行动 A。集合 X_1^2 包括参与人1所有由 $\mu_2^2(A)$或 $\mu_3^2(A)$或 $\mu_2^2(B)$或 $\mu_3^2(A)$赋给正概率的行动。

这个可理性化定义等价于下列定义。

▶定义 55.1　在战略博弈$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$中，一个行动 $a_i\in A_i$ 是**可理性化的**，如果对每个 $j\in N$ 有一集合$Z_j\subseteq A_j$ 满足：

• $a_i\in Z_i$

• 每个行动 $a_j\in Z_j$ 是对参与人j 的信念$\mu_j(a_j)$(它的支集是 Z_{-j}的一个子集)的最优反应。

注意若$(Z_j)_{j\in N}$和$(Z'_j)_{j\in N}$满足该定义则$(Z_j\cup Z'_j)_{j\in N}$也满足该定义，所以可理性化的行动组合集合是最大集合$\times_{j\in N}Z_j$，对于它$(Z_j)_{j\in N}$满足该定义。

■引理　定义 54.1 与 55.1 是等价的

证明：根据定义 54.1 若 $a_i \in A_i$ 是可理性化的则可定义 $Z_i = \{a_i\} \cup (\cup_{t=1}^{\infty} X_i^t)$ 和 $Z_j = (\cup_{t=1}^{\infty} X_j^t)$（对每一 $j \in N \setminus \{i\}$）。根据定义 55.1，若它是可理性化的，则定义 $\mu_i^1 = \mu_i(a_i)$ 和 $\mu_j^t(a_j) = \mu_j(a_j)$（对每一 $j \in N$ 和每一整数 $t \geqslant 2$）。那么在定义 54.1 第二和第四部分所定义的集合 X_j^t 是 Z_j 的子集且满足在第一和第三部分中的条件。 □

从定义 55.1 明显可知：任一有限博弈中参与人在某一混合战略纳什均衡中以正概率所采取的任何行动都是可理性化的（将 Z_j 作为参与人 j 的混合战略的支集）。下列结果表明对在某个相关均衡中以正概率所采取的行动同样是正确的。

■引理 56.2　参与人在有限战略博弈的相关均衡中以正概率所采取的每一行动都是可理性化的。

证明：用 $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ 表示战略博弈；选择一个相关均衡，并且对每一个参与人 $i \in N$ 令 Z_i 为参与人 i 在均衡中以正概率采取的行动集合。那么在参与人 i 选择 a_i 的条件下，任一 $a_i \in Z_i$ 是对由非 i 参与人的战略所产生的 A_{-i} 的分布的一个最优反应。这个分布的支集是 Z_{-i} 的一个子集且由定义 55.1 可知 a_i 是可理性化的。 □

在囚徒困境中（例 16.2）只有纳什均衡行动"坦白"是可理性化的。在第 2.3 节别的博弈中每一个参与人的两个行动都是可理性化的，因为在每个案例中两个行动都在某一混合战略纳什均衡中以正概率被采用。这样可理性化未将任何约束置于那些博弈的结果之上。对于很多别的博弈可理性化所给的约束都是弱的。不过，在一些博弈中可理性化提供的答案是明确的，就如下列练习所展示的那样。

?练习 56.3　找出图 57.1 中两人博弈的每个参与人可理性化行动的集合。

?练习 56.4　库诺特双头垄断（Cournot duopoly）考虑战略博弈 $\langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$，其中对 $i = 1, 2$ 有 $A_i = [0, 1]$ 和 $u_i(a_1, a_2) = a_i(1 - a_1 - a_2)$。试证明每个参与人惟一的可理性化行动是他惟一的纳什均衡行动。

?练习 56.5　猜均值（Guess the average）在练习 35.1 的博弈中试证

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
a_2	5,2	3,3	5,2	0,1
a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
a_4	0,0	0,−2	0,0	10,−1

图 57.1 练习 56.3 中的两人博弈

明每个参与人的均衡行动是他惟一的可理性化行动。

57

⑦练习 57.1 假使两个参与人在单位区间选择位置 a_1 和 a_2;每个参与人都希望尽可能与另一个参与人靠近,每个参与人的支付是 $-|a_1-a_2|$。试证明每个参与人的每个行动都是可理性化的,而纳什均衡集合是 $\{(a_1,a_2):a_1=a_2\}$。现在假设每个参与人都知道他与对手的距离。通过增加这样的条件来修改定义 55.1,即理性化含有行动 a_i 和距离 d 的二元组 (a_i,d) 的信念的子集是 $\{a_j-d,a_j+d\}$ 的一个子集。试证明没有 $d>0$ 使得存在一个行动 a_i 满足 (a_i,d) 在此意义下是可理性化的,而 $(a_i,0)$ 对每个 a_i 都是可理性化的。

注意在定义 54.1 及 55.1 中我们将参与人 i 的信念作为 A_{-i} 上的一个概率分布,它允许每个参与人相信他的对手们间的行动是相关的。在很多经典文献中,参与人不允许有这样的信念;它被假设为每个参与人的信念是独立概率分布的乘积,每个别的参与人都有一个(这一限制在两人博弈中明显是不重要的)。这个假设是与在混合战略均衡概念之后的动因(motivation)相一致的。我们关于可理性化的定义要求在所有理性化的水平上参与人是理性的,关于可理性化的另一定义则还要求在所有理性化水平上假设信念是独立的。

如同图 58.1 中的博弈所表示的那样,两个定义有不同的内涵。在此博弈中有三个参与人,参与人 1 选择两行中的某行,参与人 2 选择两列中的某列,参与人 3 选择四个表中的某一表。所有三个参与人获得同一支付,支付由方框中的数字所给出。我们说在定义 54.1 和 55.1 的意义下参与人 3 的行动 M_2 是可理性化的,在此意义下一个参与人可能相信其对手们间的行动是相关的,但如果参与人局限于信念是独立概率分布的乘积,则他对手的

58

行动就不是可理性化的。为明白这点，请注意参与人 1 的行动 U 是对赋概率 1 给(L,M_2)的信念的最优反应和行动 D 是对赋概率 1 给(R,M_2)的信念的最优反应；同理，参与人 2 的两个行动都是对赋正概率给 U、D 和 M_2 的信念的最优反应。进一步说，参与人 3 的行动 M_2 是对这样信念的最优反应：参与人 1 和 2 以相同概率选取(U,L)和(D,R)。这样 M_2 在我们已定义的意义下是可理性化的(在定义 55.1 中取 $Z_1=\{U,D\}$，$Z_2=\{L,R\}$ 和 $Z_3=\{M_2\}$)。不过，它对任一(独立的)混合战略二元组不是最优反应并且因此在修改的定义下不是可理性化的，在那定义中每个参与人的信念局限为独立概率分布的一个乘积。[为了使 M_2 成为一个最优反应，我们需要 $4pq+4(1-p)(1-q)\geqslant\max\{8pq,8(1-p)(1-q),3\}$，这里$(p,1-p)$和$(q,1-q)$分别为参与人 1 和 2 的混合战略，对 p 和 q 的任何值不等式都不满足。]

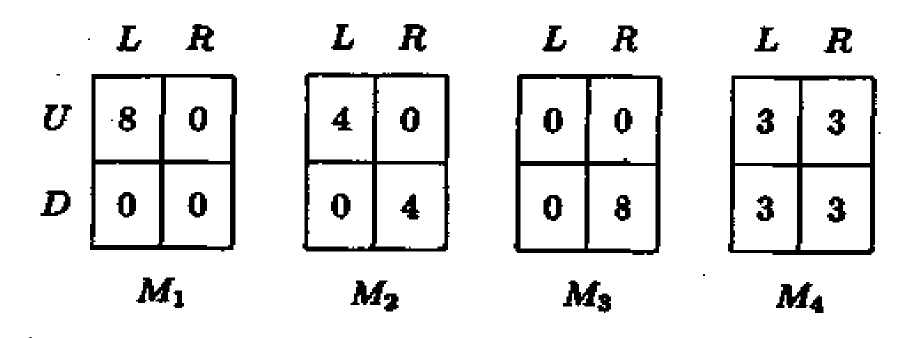


图 58.1　一个三人战略博弈。参与人 1 选择两行中的某行，参与人 2 选择两列中的某列，参与人 3 选择四表中的某表。所有三个参与人获得同一支付，支付由方框中的数字所给出

4.2　反复剔除强劣行动

同可理性化概念一样，我们现在所研究的解的概念也是从单个(single)参与人的角度来看一个博弈。每个参与人基于这样的计算来采取行动，即不需要有关别的参与人采取行动的知识。为了确定解，我们从剔除某个参与人确定的应该**不采取**的行动开始。在一个复杂的博弈中，这种假设是特别有价值的：参与人为了寻找简化他们所面对的情形的方法，将采用这一技巧。我们假设参与人不考虑别的参与人无论作什么都不是最优反应的行动。一个知道别的参与人是理性的参与人能假定他们会从考虑中排除这些行动。现在考虑博弈 G'是通过从初始博弈 G 中剔除所有这些行动所得到

59

的。再一次,在 G' 中知道别的参与人是理性的参与人,无论别的参与人干什么他都不会选择一个不是最优反应的行动。进一步说,在 G' 中一个知道别的参与人认为他是有理性的参与人,会确信他们也不会选择永非最优反应的行动。按此方法连续论证就意味着 G 的结果一定能经受住无穷次这样的剔除。现在我们系统表达这种思想并要说明它等价于可理性化概念。

4.2.1 永非最优反应

▶定义 59.1 在一战略博弈中参与人 i 的行动是**永非最优反应**(never-best response)如果它对参与人 i 的任何信念都不是最优反应。

显然任何永非最优反应都不是可理性化的。如果参与人 i 的一个行动 a_i 是一永非最优反应则对参与人 i 的每一信念存在某一行动(它可能依赖于信念)对参与人 i 来说比 a_i 更好。现在我们要证明在一有限博弈中如果 a_i 是一永非最优反应则无论参与人 i 持何信念都存在一个混合战略对参与人 i 来说比 a_i 更好。这一性质被精确地定义为如下所述。

▶定义 59.2 在战略博弈 $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 中参与人 i 的行动 $a_i\in A_i$ 是**强劣的**(strictly dominated)如果存在一个参与人 i 的混合战略 α_i 满足对所有 $a_{-i}\in A_{-i}$ 有 $U_i(a_{-i},\alpha_i)>u_i(a_{-i},a_i)$,这里 $U_i(a_{-i},\alpha_i)$ 是当参与人 i 使用混合战略 α_i 和其他参与人的行动向量是 a_{-i} 时参与人 i 的支付。

实际上我们表明了在每个参与人的行动集合都是有限的博弈中一个行动是永非最优反应 当且 仅 当它是强劣的。这样在这些博弈中强劣概念有着决策理论的基础,它并不涉及混合战略。可以说一个人即使会拒绝混合战略成为选择目标的思想,他仍能会认为一个参与人不会采用强劣行动。

■引理 60.1 在有限战略博弈中参与人的行动是永非最优反应当且仅当它是强劣的。 60

证明:令战略博弈为 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 令 $a_i^*\in A_i$。考虑辅助的严格竞争博弈 G'(参看定义 21.1),在 G' 中参与人 1 的行动集合是 $A_i\setminus\{a_i^*\}$,参与人 2 的行动集合是 A_{-i},参与人 1 的偏好在给定 $v_1(a_i,a_{-i})=u_i(a_{-i},a_i)-u_i(a_{-i},a_i^*)$ 条件下由支付函数 v_1 所代表。(注意 v_1 的自

变量(a_i, a_{-i})是G'中的行动二元组而自变量(a_{-i}, a_i)和(a_{-i}, a_i^*)是G中的行动组合。)对任何给定的G'中混合战略组合(m_1, m_2)我们用$v_1(m_1, m_2)$表示参与人1的期望支付。

行动a_i^*是G中的永非最优反应当且仅当对G'中参与人2的任一混合战略都有参与人1的一个行动产生正支付;那即是,当且仅当$\min_{m_2}\max_{a_i} v_1(a_i, m_2) > 0$。这同样是当且仅当$\min_{m_2}\max_{m_1} v_1(m_1, m_2) > 0$(由$m_1$中$v_1$的线性)。

现在,由命题33.1博弈G'有一混合战略纳什均衡,这样由命题22.2的(b)部分应用于G'的混合扩展我们有$\min_{m_2}\max_{m_1} v_1(m_1, m_2) > 0$当且仅当$\max_{m_1}\min_{m_2} v_1(m_1, m_2) > 0$;那也是,当且仅当存在$G'$中参与人$i$的一混合战略$m_1^*$满足对所有$m_2$有$v_1(m_1^*, m_2) > 0$(即对所有$A_{-i}$上的信念)。因为$m_1^*$是$A_i \setminus \{a_i^*\}$上的一概率测度,所以它是$G$中参与人1的一个混合战略;条件$v_1(m_1^*, m_2) > 0$(对所有$m_2$)等价于$U_i(a_{-i}, m_1^*) - U_i(a_{-i}, a_i^*) > 0$(对所有$a_{-i} \in A_{-i}$),这等价于$a_i^*$是强劣的。 □

注意在此证明中的论证依赖于我们的假设:参与人对于不确定事件的偏好满足von Neuman和Morgenstern假设,如果偏好不满足这些假设,则为一永非最优反应与强劣的性质一般是不等价的。

4.2.2 反复剔除强劣行动

我们现在正式定义本部分开始时我们所描述的过程。

▶定义60.2 有限战略博弈$\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$的结果集合$X \subseteq A$**是反复剔除强劣行动剩下的**(survives iterated elimination of strictly dominated actions)。如果$X = \times_{j \in N} X_j$且有一集合族$((X_j^t)_{j \in N})_{t=0}^T$对每个$j \in N$满足下列条件:

61

- $X_j^0 = A_j$且$X_j^T = X_j$
- $X_j^{t+1} \subseteq X_j^t$,对每一个$t = 0, \cdots, T-1$
- 对$t = 0, \cdots, T-1$参与人j在$X_j^t \setminus X_j^{t+1}$中的每个行动在博弈$\langle N, (X_i^t), (u_i^t)\rangle$中都是强劣的,这里$u_i^t$对每一个$i \in N$都局限于$\times_{j \in N} X_j^t$的函数$u_i$。

• X_j^T 中没有行动在博弈 $\langle N,(X_i^T),(u_i^T)\rangle$ 中是强劣的。

◇例 61.1 图 61.1 的博弈中，行动 B 对于 T 和 M 以同等概率 $\frac{1}{2}$ 被采用的混合战略是劣的。在 B 从博弈中剔除后，对于 R，L 是劣的；在 L 被剔除后，对于 M，T 又是劣的。这样 (M,R) 是反复剔除强劣行动后剩下的惟一结果。

	L	R
T	3,0	0,1
M	0,0	3,1
B	1,1	1,0

图 61.1 两人战略博弈。参与人 1 惟一的可理性化行动是 M，参与人 2 惟一的可理性化行动是 R

我们现在要说明反复剔除劣行动剩下的结果集合是存在的，且是可理性化的行动组合集合

■命题 61.2 若 $X=\times_{j\in N}X_j$ 是在一个有限战略博弈 $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 中反复剔除劣行动剩下的，则对每一个 $j\in N$，X_j 是参与人 j 的可理性化的行动集合。

证明：假设 $a_i\in A_i$ 是可理性化的，且令 $(Z_j)_{j\in N}$ 为在定义 55.1 中支撑 a_i 的集合组合。对任何 t 值我们有 $Z_j\subseteq X_j^t$，因为 Z_j 中的每个行动都是对关于 Z_{-j} 的某一信念的最优反应，因此在博弈 $\langle N,(X_i^t),(u_i^t)\rangle$（由引理 60.1）中不是强劣的。所以 $a_i\in X_i$。

现在我们要证明对每一个 $j\in N$，X_j 的每一元素都是可理性化的。由可理性化定义：X_j 中的任何行动在这样的博弈中都不是强劣的，即每个参与人 i 的行动集合是 X_i。这样由引理 60.1，X_j 中的每一个行动对某个 X_{-j} 上的信念在 X_j 的元素中都是一个最优反应。我们需要证明的是 X_j 中的每个行动在集合 A_j 的所有元素中对 X_{-j} 上的某个信念的最优反应。如果 $a_j\in X_j$ 在 A_j 的所有元素中不是一个最优反应那么有一个 t 值使得 a_j 对 X_{-j} 上的信念 μ_j 在 X_j^t 的所有元素中是一个最优反应，但在 X_j^{t-1} 的元素中不是一个最优反应。这样就有一个行动 $b_j\in X_j^{t-1}\setminus X_j^t$，它对 μ_j 在 X_j^{t-1} 的元素

62

中是一个最优反应，这就与 b_j 在该过程的第 t 阶段被剔除的事实相矛盾。□

请注意定义 60.2 中的过程并不要求所有强劣战略在任一阶段被全部剔除。因此该结论表明剔除的顺序和速度不影响剩下的结果集合。

如果我们将可理性化的定义修改为要求参与人相信他们对手的行动是独立的，则引理 60.1 和反复剔除强劣行动的概念与可理性化的等价都将不成立。为说明之，考虑图 58.1 中的博弈。行动 M_2 对参与人 3 的关于参与人 1 和 2 以同等概率采取 (U,L) 和 (D,R) 的信念是一个最优反应因而不是强劣的。不过，如我们以前所知，在修改的定义下（其中每个参与人的信念局限为独立信念的一个乘积。）它对（独立的）混合战略的任一二元组不是一最优反应因而不是可理性化的。

4.3 反复剔除弱劣行动

我们说一个参与人的行动是弱劣的，如果无论别的参与人做什么这个参与人有另一行动至少与该行动一样好，且对至少某个别的参与人的行动向量来说（比该行动）更好。

▶定义 62.1 在战略博弈 $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 中参与人 i 的行动 $a_i \in A_i$ 是**弱劣的**(weakly dominated)，如果有一个参与人 i 的混合战略 α_i 满足对所有 $a_{-i} \in A_{-i}$ 有 $U_i(a_{-i},\alpha_i) \geqslant u_i(a_{-i},a_i)$ 和对某一 $a_{-i} \in A_{-i}$ 有 $U_i(a_{-i},\alpha_i) > u_i(a_{-i},a_i)$，这里 $U_i(a_{-i},\alpha_i)$ 是参与人 i 使用混合战略 α_i 和别的参与人行动向量是 a_{-i} 时参与人 i 的支付。

由引理 60.1，一个弱劣而非强劣的行动是对某一信念的最优反应。这一事实使得反对使用一个弱劣行动的观点弱于反对使用一个强劣行动的观点。然而因为使用弱劣行动并无好处，所以在简化复杂博弈的过程中剔除这些行动就是很自然的了。

63 弱劣概念导致了一个类似于反复剔除强劣行动的过程（定义 60.2）。不过，这个过程并不怎么吸引人，因为反复剔除弱劣行动剩下的行动集合可能依赖于行动被剔除的顺序，如图 63.1 中的两人博弈所示。我们先剔除 T（对于 M 弱劣）接着剔除 L（对 R 弱劣）的序列导致了参与人 2 选择 R 和支付组合是 (2,1) 的结果。另一方面，我们先剔除 B（对 M 弱劣），接着剔

除 R(对 L 弱劣)的序列导致了参与人 2 选择 L 和支付组合是(1,1)的结果。我们将在第 6.6 节进一步讨论反复剔除弱劣行动的过程。

	L	R
T	1,1	0,0
M	1,1	2,1
B	0,0	2,1

图 63.1 两人博弈,其中反复剔除弱劣行动剩下的行动集合依赖于行动被剔除的顺序

?练习 63.1 考虑练习 18.6 中博弈的一个变形,在其中有两个参与人,市民喜欢的位置的分布是同一的,每个参与人局限于选择一个形如 l/m 的位置,这里 m 是偶数,$l\in\{0,\cdots,m\}$。试证明反复剔除弱劣行动剩下的惟一结果是这样的,即两个参与人都选择位置 1/2。

?练习 63.2 占优可解性(Dominance Solvability)一个战略博弈是占优可解的,如果所有参与人对由在每个阶段每个参与人的所有弱劣行动都被剔除的反复剔除过程剩下的所有结果都是无偏好的,试给出一个占优可解的战略博弈例子,但该博弈不是所有参与人对反复剔除弱劣行动剩下的所有结果都无偏好的情形(并不是所有弱劣行动在每一阶段都可能被剔除的过程)。

?练习 64.1 两个参与人中的每人都报一个最多为 100 的非负整数。若 $a_1+a_2\leqslant 100$,这里 a_i 是由参与人 i 所报的数,那么每个参与人 i 收到支付 a_i。若 $a_1+a_2>100$ 且 $a_i<a_j$,那么参与人 i 收到 a_i 且参与人 j 收到 $100-a_i$;若 $a_1+a_2>100$ 且 $a_i=a_j$,则每个参与人收到 50。试说明该博弈是占优可解的(参看前面的练习)并找到剩下的结果集合。 64

引理 60.1 表明在一个有限博弈中一个非强劣行动对某个信念是最优反应。下面的练习对一个非 弱劣行动(或混合战略)强化了这一结论。

?练习 64.2 试证明在有限战略博弈中一个参与人的任一非弱劣混合战略对赋正概率给别的参与人的每一个行动向量的信念都是最优反应。〔提

示:令$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$为该博弈且令 U 为形如$(u_1(a_{-1}^1, m_1), \cdots, u_1(a_{-1}^k, m_1))$的所有向量集合,这里 m_1 属于参与人 1 的混合战略;$\{a_{-1}^1, \cdots, a_{-1}^k\}$是除参与人 1 之外其他参与人的所有行动向量集合。令 $u^* \in U$ 对应于参与人 1 的一个非弱劣混合战略。你需要证明存在一个正向量 p^* 满足对所有 $u \in U$ 有 $p^* \cdot u^* \geq p^* \cdot u$。这样做为了不失一般性,令 $u^* = 0$,并且对任一 $\epsilon > 0$ 令 $P(\epsilon) = \{p \in \mathbb{R}^k : p_i \geq \epsilon$,对所有 i 和$\sum_{i=1}^k p_i = 1\}$。对集合 $P(\epsilon)$和 U 使用练习 36.3 的结论且令$\epsilon \to 0$;同时要应用 U 为有限个向量的凸包这一事实。]

[注解]

可理性化概念源于 Bernheim(1984)和 Pearce(1984)(他们两个都限制参与人去相信他们对手的行动是独立的)。(Spohn(1982)讨论了这一思想,但对其没有系统表达。对反复剔除劣战略的过程看法首先由 Gale(1953)和 Luce and Raiffa(1957;pp. 108—109, 173)详细研究;我们所给的系统表述应归于 Moulin(1979)。引理 60.1 归于 Pearce(1984);它与 van Damme(1983)的引理 3.2.1 紧密相关。命题 61.2 应归于 Pearce(1984;p. 1035)。

练习 56.4 中的结论应归于 Gabay and Moulin (1980), Bernheim(1984)和 Moulin(1984)。练习 56.5 摘于 Moulin(1986, p, 72)。练习 57.1 摘于 Rubinstein and Wolinsky(1994)。练习 63.2 中占优可解性概念应归于 Moulin(1979),它与 Luce and Raiffa(1957, p. 109)的"在完全弱意义下的可解性"的概念紧密相关。练习 64.1 归功于Brams and Taylor(1994),练习 64.2 应归于 Arrow, Barankin and Blackwell(1953)。

65

对于一类可理性化给出明确答案的博弈可参看 Vives(1990)和 Milgrom and Roberts(1990)。

第5章

知识与均衡

在本章,我们描述一个知识模型并用它来系统表达一个事件是"共同知识"的思想,用它去探究人们"彼此同意保留不同意见"是否可能,并用它去正式说明关于参与人隐含于纳什均衡概念和可理性化之后的知识的假设。

5.1 一个知识模型

战略博弈是对参与人之间的相互作用建模。因此我们不反对参与人对有关外来参数的知识感兴趣,对有关别的参与人的知识感兴趣。我们首先对单一决策主体的知识模型作一简单介绍。

该模型的基础是一个状态(state)集合 Ω。状态的概念在经典文献中有两种解释。在一个极端,状态被视为决策主体在确定的决策问题背景下感觉为相关的不确定性的描述。这种解释在标准的不确定性经济模型中被采用。在另一极端,状态被视为对世界的完整描述;不仅包括决策主体的信息和信念,还包括他的行动。

5.1.1 信息函数

确定决策主体对有关状态的知识范围的一个方法是确定一个信息函数 P,它将每一状态 $\omega\in\Omega$ 与 Ω 的一个非空子集 $P(\omega)$ 相联系。其解释是当状态是 ω 时决策主体仅知道状态在集合 $P(\omega)$ 中。即,他认为实际状态可能是 $P(\omega)$ 中的任一状态而非 $P(\omega)$ 之外的任一状态。 68

▶定义 68.1 对于状态集合 Ω 的一个**信息函数**(information function)

是这样一个函数 P，它将每一状态 $\omega\in\Omega$ 与 Ω 的一个非空子集 $P(\omega)$ 联系起来。

当我们使用一个信息函数去对一个决策主体的知识建模时我们经常设定包含状态集合和信息函数的二元组 $\langle\Omega,P\rangle$ 满足下列两个条件：

P1 对每一 $\omega\in\Omega$，$\omega\in P(\omega)$。

P2 若 $\omega'\in P(\omega)$，则 $P(\omega')=P(\omega)$。

P1 是说决策主体从来不会将真实状态从他认为可能的状态集合中排除出去：他永远不能确认该状态是与真实状态不同的。P2 是说决策主体利用状态与他的信息的一致性或不一致性来作关于状态的推断。假设，与 P2 相反，$\omega'\in P(\omega)$ 且有一个状态 $\omega''\in P(\omega')$，$\omega''\notin P(\omega)$，那么如果状态是 ω，决策主体会认为既然 ω'' 与他的信息不一致，则真实状态不会是 ω'。同理，如果有一状态 $\omega''\in P(\omega)$，$\omega''\notin P(\omega')$，那么当状态是 ω 时决策主体就会认为既然 ω'' 与他的信息一致则真实状态不会是 ω'。

下列条件等价于 P1 和 P2。

▶定义68.2 对于状态集合 Ω，信息函数 P 是**分割的**(partitional)如果有 Ω 的一个分割使得对任一 $\omega\in\Omega$，集合 $P(\omega)$ 是包含 ω 的分割的元素。

■引理 68.3 一个信息函数是分割的当且仅当它满足 P1 和 P2。

证明：若 P 是分割的则它显然满足 P1 和 P2。现在假设 P 满足 P1 和 P2。若 $P(\omega)$ 和 $P(\omega')$ 相交且 $\omega''\in P(\omega)\cap P(\omega')$，则由 P2 我们有 $P(\omega)=P(\omega')=P(\omega'')$；由 P1 我们有 $\bigcup_{\omega\in\Omega}P(\omega)=\Omega$。这样 P 是分割的。 □

给定该结论，满足 P1 和 P2 的一个信息函数可被它导出的信息分割所确定。

◇例 68.4 令 $\Omega=[0,1)$ 且假设决策主体仅观察到一个数的十进制展开的前 4 个数字。那么对每一个 $\omega\in\Omega$，集合 $P(\omega)$ 是所有这种状态 $\omega'\in\Omega$ 的集合，即 ω' 的前 4 个数字同 ω 的前 4 个数字是一样的。这个信息函数是分割的。

?练习 69.1 令 Q 为一个问题集合，问题的答案要么是"Yes"，要么

是“No”。一个状态是对 Q 中所有问题答案的一览表。假设信息函数 P 有下列性质：对某一状态 ω_1 集合 $P(\omega_1)$ 包括所有对前两个问题的答案与 ω_1 一样的状态，对另一状态 ω_2 集合 $P(\omega_2)$ 包括所有对前 3 个问题的答案与 ω_2 一样的状态。P 必须是分割的吗？

?练习 69.2 一个决策主体被告知一个整数 Ω 但仅记得该数是 $n-1, n, n+1$ 中的某个。用一信息函数对决策主体的知识建模并确定该函数是否是分割的。

5.1.2 知识函数

我们称一个状态集合（Ω 的一子集）为一**事件**（event）。给定我们关于信息函数的解释，一个 $P(\omega)\subseteq E$ 的决策主体在状态 ω 中，知道事件 E 中的某一状态已经发生了。在此情形下我们说在状态 ω 中决策主体**知道** E。给定 P 我们现在定义决策主体的**知识函数**（knowledge function）K 为：

$$K(E)=\{\omega\in\Omega: P(\omega)\subseteq E\} \qquad (69.3)$$

对任一事件 E 集合 $K(E)$ 是所有状态（在其中决策主体知道 E）的集合。从任一信息函数派生出的知识函数 K 都满足下面三个性质。

K1 $K(\Omega)=\Omega$

这是说在所有状态中决策主体都知道 Ω 中的某一状态已经发生。

K2 若 $E\subseteq F$ 则 $K(E)\subseteq K(F)$

这是说若无论 E 什么时候发生 F 都发生且决策主体知道 E，则他知道 F：若 E 包含 F 则 E 的知识包含 F 的知识。

K3 $K(E)\cap K(F)=K(E\cap F)$

该性质的解释是若决策主体既知道 E 又知道 F，则他知道 $E\cap F$。 70

若 P 满足 P1 则相关的知识函数 K 满足下列附加性质。

K4 （知识公理） $K(E)\subseteq E$

这是说无论何时决策主体知道 E，那么确实有 E 中的某一元素是真实状态；决策主体不知道任何错误的事情。该公理是这样从 P1 中导出的：若 $\omega\in K(E)$，则 $P(\omega)\subseteq E$，所以由 P1 我们有 $\omega\in E$。

若 P 是分割的（即：满足 P1 和 P2）那么 $K(E)$ 是作为 E 的子集的分割的所有元素的并集。（若 E 不含分割的任一元素，则 $K(E)$ 是空的。）在此情形下知识函数 K 满足下列两个附加性质。

K5 （透明度公理） $K(E)\subseteq K(K(E))$

给定将 $K(E)$解释为决策主体知道 E 的事件，我们将 $K(K(E))$解释为决策主体知道他知道 E 的事件。正如我们上面所提到的，若 P 满足 P1 和 P2，那么集合 $K(E)$是由 P 导致的分割的元素的并集；由此评述从 K5 便可导出若 F 是分割的元素的一个并集，则 $K(F)=F$。

K6 （智慧公理） $\Omega\setminus K(E)\subseteq K(\Omega\setminus K(E))$

该公理的解释是决策主体知道什么是他所不知的。若他不知道 E 则他知道他不知道E。因为 P 是分割的，所以 $K(E)$是由 P 导致的分割的元素的一个并集，这样 $\Omega\setminus K(E)$也是这样一个并集，K6 由此成立。

注意给定 K 满足 K4，则 K5 和 K6 中的性质在实际上同等拥有。

我们已经将一个信息函数作为原生的并且从它派生了一个知识函数。反过来我们可先对集合 Ω 定义一个**知识函数**为函数 K，它将 Ω 的一个子集与每一事件 $E\subseteq\Omega$ 联系起来。然后我们可从它派生出一个信息函数 P 如下：对每一状态 ω 令

$$P(\omega)=\bigcap\{E\subseteq\Omega: K(E)\ni\omega\} \qquad (70.1)$$

（如果没有事件 E 满足$\omega\in K(E)$，则我们将交集视作 Ω。）

71 ?练习 71.1

a. 给定一信息函数 P，令 K 为由(69.3)所定义的知识函数，且令 P'为由(70.1)中的派生出的信息函数。试证明 $P'=P$。

b. 给定满足 K1，K2 和 K3 的知识函数 K，令 P 为由(70.1)定义的信息函数，且令 K' 为由(69.3)中的 P 派生出的知识函数。试证明 $K'=K$。

?练习 71.2 使用我们已描述的架构，我们可将一个个人决策问题系统表达如下：令 A 为一行动集合，Ω 为一状态集合，P 为一分割信息函数，π 为一个 Ω 上的概率测度，$u: A\times\Omega\to\mathbb{R}$ 为一期望值代表了个人关于 A 上不确定事件的偏好的函数。个人的问题是去选择一个函数 $a:\Omega\to A$（称为一行动(act)，其满足：只要 $\omega\in P(\omega)$和 $\omega'\in P(\omega)$，则 $a(\omega)=a(\omega')$，去解决问题 $\max_a E_\pi u(a(\omega),\omega)$（这里 E 为期望算符）。若对所有 $\omega\in\Omega$，$P(\omega)\subseteq P'(\omega)$（即若由 P'导致的分割的每一个元素都是由 P 导致的分割的元素的一个并集），则定义分割信息函数 P'是比信息函数P 更粗糙的(coarser)。试说明若 P'比 P 更粗糙，则在信息函数 P'下的最优行动不优于在信息函数P 下的最优行动。试将此结论与练习 28.2 中的结论作比较。

5.1.3 一个阐述性的例子：帽子之谜(The Puzzle of the Hats)

下面这个在20世纪前半叶的一段时间曾“风靡欧洲”的谜(Littlewood(1953,p.3),阐述了我们已定义的概念。几个“完全理性”的人围绕一张桌子而坐,他们每人戴一顶颜色或白或黑的帽子。每个人都能看到别的 $n-1$ 个人的帽子,但看不到自己的帽子。一个旁观者宣布:“你们中的每位都戴着顶颜色或白或黑的帽子,这些帽子中至少有一顶是白的,我将开始慢慢数数。每次数数后你们都有机会举一只手。不过你只能在你知道你帽子颜色的情况下才能这样做。”第一次在什么时候有人会举手?

下面我们用我们已介绍的正式模型来回答该问题。开始,在旁观者宣布后,状态集合是帽子颜色的所有结构 $c=(c_1,\cdots,c_n)$ 的集合,这里每一个 c_i 要么是 W 要么是 B 且至少有一个 c_i 是 W。这 2^n-1 个状态组成集合。 72

$$\Omega=\{c\in\{B,W\}^n:|\{i:c_i=W\}|\geqslant 1\}$$

任何个人 i 的初始信息函数 P_i^1 给定如下:在任一状态 c 中集合 $P_i^1(c)$ 包括所有与 i 的观察相一致的状态,因而包含至多两个状态,它们仅随 i 的帽子颜色不同而不同。精确地说,如果 c 是这样一种状态,在其中一个不是 i 的个人戴了顶白帽,那么 $P_i^1(c)=\{(c_{-i},W),(c_{-i},B)\}$,如果 c 是这样一种状态,在其中别的所有个人都戴黑帽,那么 $P_i^1(c)=\{c\}$(因为不是所有人都戴黑帽)。

对于拥有信息函数 P_i 的个人 i“知道他的帽子颜色”意味着什么呢?这意味着要么他知道事件 $\{c:c_i=W\}$ 发生,要么他知道事件 $\{c:c_i=B\}$ 发生。因此事件“i 知道他的帽子颜色”是

$$E_i=\{c:P_i(c)\subseteq\{c:c_i=B\}\text{或}P_i(c)\subseteq\{c:c_i=W\}\}$$

仅在状态 c(在其中恰有一个人 i 对于他有 $c_i=W$)中对某一 j 有 $P_j^1(c)\subseteq E_j$,且在此情形下 $P_i^1(c)\subseteq E_i$,所以 i 举手。

现在令 $F^1=\{c:|\{i:c_i=W\}|=1\}$,它是在第一阶段有某个人举手的状态集合。若在第一阶段没有人举手,那么所有个人获得状态不在 F^1 中这一附加信息,因而对所有 i 和对所有 $c\notin F^1$ 我们有 $P_i^2(c)=P_i^1(c)\setminus F^1$。也就是,在任一这种状态中每个人都推知至少有两个人戴白帽。我们有 $P_i^2(c)=P_i^1(c)=\{(c_{-i},W),(c_{-i},B)\}$,除非对恰有一个人 $j\neq i$,$c_j=W$,在此情形下 $P_i^2(c_{-i},W)=\{(c_{-i},W)\}$(且 $P_j^2(c_{-j},W)=\{(c_{-j},W)\}$。换言

之，在任一状态中为精确起见，设有两个人 j 和 h，满足 $c_j = W$ 和 $c_h = W$，则我们有 $P_j^2(c) \subseteq E_j$ 和 $P_h^2(c) \subseteq E_h$，因此 h 和 j 在第二阶段都举手。现在令 $F^2 = \{c : |\{i : c_i = W\}| = 2\}$，在该状态集合中过程在第二阶段结束。在旁观者 2 后仍无人举手($c \notin F^1 \cup F^2$)，则在此状态中所有个人都推断至少有三顶帽子是白的，过程以 $P_i^3(c) = P_i^2(c) \setminus F^2$ 继续。很容易可以看出若 k 顶帽子都是白的，则直到旁观者数 k 才有人举手，在这时戴白帽的 k 个人举手。

73

5.2 共同知识

如果在某状态中每个人都知道某一事件则我们说在这个状态中该事件是“共有的知识”。我们说一个事件是“共同知识”，如果它不仅是共有知识，而且每个人都知道所有别的参与人都知道它，每个人都知道所有其他人都知道所有人都知道它，如此等等。为了简单，限于两人情形的共同知识概念系统表达成如下定义。

▶定义 73.1　令 K_1 和 K_2 为个人 1 和 2 对状态集合 Ω 的知识函数。一个事件 $E \subseteq \Omega$ **是状态** $\omega \in \Omega$ **中 1 和 2 间的共同知识**(common knowledge between 1 and 2 in the state)，如果 ω 是无穷序列 $K_1(E), K_2(E), K_1(K_2(E)), K_2(K_1(E)), \cdots\cdots$ 中每个集合的一个元素。

共同知识的另一个定义(在命题 74.2 中我们要说明它是等价的)是用个人信息函数来叙述的。

▶定义 73.2　令 P_1 和 P_2 为个人 1 和 2 对状态集合 Ω 的信息函数。一个事件 $F \subseteq \Omega$ **是在 1 和 2 间自明的**(self-evident between 1 and 2)，如果对所有 $\omega \in F$，我们有 $P_i(\omega) \subseteq F$(对 $i = 1,2$)。一个事件 $E \subseteq \Omega$ **是在状态** $\omega \in \Omega$ **中 1 和 2 间的共同知识**(common knowledge between 1 and 2 in the state $\omega \in \Omega$)如果有一个自明的事件 F 满足 $\omega \in F \subseteq E$。

简言之，一个事件在两个人间是自明的，如果不管它什么时候发生，两个人都知道它发生了(即不管它什么时候发生它都是两人间的共有知识)，并且是状态 ω 中的共同知识，如果有一包含 ω 的自明事件，它的发生蕴含了 E。

◇例 73.3 令 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$，令 P_1 和 P_2 为个人 1 和 2 的分割信息函数，并令 K_1 和 K_1 为相关的知识函数。令由信息函数导致的分割为

$$\mathcal{P}_1=\{\{\omega,\omega_2\},\{\omega_3,\omega_4,\omega_5\},\{\omega_6\}\}$$
$$\mathcal{P}_2=\{\{\omega_1\},\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\},\{\omega_5\},\{\omega_6\}\}$$

事件 $E=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ 不包含任何 1 和 2 间的自明事件，因此没有任何状态使 E 在第二种定义(73.2)的意义下是 1 和 2 间的共同知识。事件 E 在第一种定义(73.1)的意义下，在任何状态都不是共同知识，因为 $K_1(K_2$ 74 $(K_1(E_1)))=\phi$，如下列计算所展示的那样：

$$K_1(E)=\{\omega,\omega_2\},\quad K_2(E)=E,$$
$$K_2(K_1(E))=\{\omega_1\},\quad K_1(K_2(E))=\{\omega_1,\omega_2\},$$
$$K_1(K_2(K_1(E)))=\phi,\quad K_2(K_1(K_2(E)))=\{\omega_1\}.$$

事件 $F=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}$ 在 1 和 2 间是自明的，因此在第二种定义的意义下，在 F 的任一状态中都是 1 和 2 间的共同知识。因为 $K_1(F)=K_2(F)=F$，事件 F 在第一种定义的意义下在 F 的任一状态中同样是 1 和 2 间的共同知识。

在证明共同知识的两个定义是等价的之前，我们先建立下列结论。

■引理 74.1 令 P_1 和 P_2 为个人 1 和 2 对状态集合 Ω 的分割信息函数，令 K_1 和 K_2 为相关的知识函数，且令 E 为一事件。那么下列的三个条件是等价的。

a. $K_i(E)=E$，对 $i=1,2$。

b. E 在 1 和 2 间自明的。

c. E 是由 $P_i(i=1,2)$ 导致的分割的元素的一个并集。

证明：假设(a)成立，则对每个 $\omega\in E$ 我们有 $P_i(\omega)\subseteq E$(对 $i=1,2$)因此(b)满足；假设(b)成立，则对 $i=1,2$，$E=\bigcup_{\omega\in E}P_i(\omega)$，因此 E 是两个分割的元素的一个并集，所以(c)满足。最后由(c)立即可知(a)成立。

现在我们来证明定义 73.1 和 73.2 是等价的。

■命题 74.2 令 Ω 为一有限状态集合，令 P_1 和 P_2 为个人 1 和 2 的分割信息函数，且令 K_1 和 K_2 是相关的知识函数。那么根据定义 73.1 一个事件 $E\subseteq\Omega$ 在状态 $\omega\in\Omega$ 中是 1 和 2 间的共同知识，当且仅当它根据定义 73.2 在状态 ω 中是 1 和 2 间的共同知识。

证明：假定事件 E 根据定义 73.1 是状态 ω 中 1 和 2 间的共同知识。对每一个 $i\in\{1,2\}$ 和 $j\neq i$ 我们有 $E\supseteq K_i(E)\supseteq K_j(K_i(E))\supseteq K_i(K_j(K_i(E)))\supseteq\cdots$ 且 ω 是所有这些集合的一个元素，所以它们不是空的。这样因为 Ω 是有限的，所以有一集合 $F_i=K_i(K_j(K_i\cdots K_i(E)\cdots))$ 满足 $K_j(F_i)=F_i$；因为 P_i 是分割的，K_i 满足 K4 和 K5，所以我们也有 $K_i(F_i)=F_i$。这样由引理 74.1 事件 F_i 在 1 和 2 间是自明的，所以 E 根据定义 73.2 是 ω 中的共同知识。

75

现在假定根据定义 73.2，$E\subseteq\Omega$ 在状态 ω 中是 1 和 2 间的共同知识。那么存在一自明事件 F 有 $\omega\in F\subseteq E$。由引理 74.1，每个形为 $K_i(K_j(K_i\cdots K_i(F)\cdots))$ 的集合都与 F 重叠。从 K2 可知 ω 是所有形如 $K_i(K_j(K_i\cdots K_i(E)\cdots))$ 集合的一个元素，因此 E 根据定义 73.1 是 ω 中的共同知识。 □

5.3 人们能彼此同意保留不同意见吗？

下面是一个能用我们已经描述的框架来叙述的有趣问题。在两个具有相同先验概率的个人间，个人 1 赋概率 η_1 给某一事件，而个人 2 赋概率 $\eta_2\neq\eta_1$ 给同一事件，能成为共同知识吗？答案似乎是肯定的：当他们拥有不同信息时，在这种方式下个人可能“彼此同意保留不同意见”。不过，现在我们要证明的是如果个人的信息函数是分割的则答案是否定的。

贝叶斯博弈（第 2.6 节）是一个使该结论很有趣的背景。在经典文献中常作的假设是在这个博弈中所有参与人有同一先验概率。结论所包含的是在这一假设下参与人赋不同后验概率给同一事件在他们间不可能是共同知识。因此如果我们想对概率方面的差异是共同知识这样的情形建模，我们必须假定参与人的先验概率是不同的。

令 ρ 为状态集合 Ω 上的一概率测度，其被解释为个人的共同先验概率，且令 P_1 和 P_2 为个人的信息函数。如果 E 是一事件且 $\rho(E|P_i(\omega))=\eta_i$（这里 $\rho(E|P_i(\omega)$ 是 E 的以 $P_i(\omega)$ 为条件的概率），则给定状态 ω 中他的信息，个人 i 赋概率 η_i 给事件 E。因此事件“个人 i 赋概率 η_i 给 E”是 $\{\omega\in\Omega:\rho(E|P_i(\omega))=\eta_i\}$。

■命题 75.1　假定状态集合 Ω 是有限的且个人 1 和 2 有相同的先验

概率。如果每个人的信息函数是分割的且它们在个人1赋概率 η_1 给某一事件 E 和个人2赋概率 η_2 给 E 的某一状态 $\omega^* \in \Omega$ 中是1和2间的共同知识，那么 $\eta_1 = \eta_2$。

76

证明：若假设满足有一个自明的事件 $F \ni \omega^*$，它是 $\{\omega \in \Omega: \rho(E \mid P_1(\omega) = \eta_1\}$ 和 $\{\omega \in \Omega: \rho(E \mid P_2(\omega) = \eta_2\}$ 支集的一个子集，且因此为这两个集合的一个子集，这里 ρ 是共同先验概率。由引理74.1，对每个人 i 事件 F 是 i 的信息分割的元素的一个并集。因为 Ω 是有限的，所以每个并集中集合的个数也是有限的；令 $F = \cup_k A_k = \cup_k B_k$。对任何不相交集 C 和 D，满足 $\rho(E \mid C) = \eta_i$ 和 $\rho(E \mid D) = \eta_i$，我们有 $\rho(E \mid C \cup D) = \eta_i$。所以，既然对每一个 k 我们有 $\rho(E \mid A_k) = \eta_1$，从而 $\rho(E \mid F) = \eta_1$；同理 $\rho(E \mid F) = \eta_2$。故 $\eta_1 = \eta_2$。 □

?练习76.1 试证明如果具有分割信息函数的两个人有相同先验概率，那么他们赋不同概率于某一事件可能是他们间的共同知识。不过，试证明由个人1所赋的概率超过由个人2所赋的概率不可能是共同知识。

?练习76.2 试证明如果具有分割信息函数的两个人有相同先验概率，那么个人1相信某一不确定事件的期望超过某个数 η 而个人2相信这个期望少于 η 在他们俩间不可能是共同知识。试举例说明该结论依赖于个人信息函数是分割的这一假设。

5.4 知识和解的概念

在前面各章中我们讨论了纳什均衡和可理性化的概念。当寻求这些概念的动因时我们往往不正式地求助于关于参与人所知的假设。本部分我们将应用上面描述的模型去正式考察那些隐含于解的概念之后的关于参与人知识的假设。

从始至终我们将注意力集中于给定的战略博弈 $G = \langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$ 上(见定义11.1)。

令 Ω 为一状态集合，其中每一个状态都是对与博弈相关的环境的一个描述：也就是对每个参与人的知识、行动和信念的一个描述。正式地，每一

个状态 $\omega\in\Omega$ 包括对每一个参与人 i 的下列详细规定：

- $P_i(\omega)\subseteq\Omega$，它描述了参与人 i 在状态 ω 中的知识(这里 P_i 是一分割信息函数)。
- $a_i(\omega)\in A_i$，由参与人 i 在状态 ω 中选择的行动。

77

- $\mu_i(\omega)$，$A_{-i}=\times_{j\in N\setminus\{i\}}A_j$ 上的一概率测度，是参与人 i 在状态 ω 中关于别的参与人行动的信念。(注意这允许参与人去相信别的参与人的行动是相关的。)

请注意状态的概念，因为它包含了对每个参与人的知识、行动和信念的一个详细规定，它可以是自反的：如果在状态 ω_1 中某个参与人不知道状态是 ω_1 还是 ω_2 那么关于 ω_1 的描述就指它自己。

在这一状态集合的定义中我们暗含的假设是博弈为 G 在所有参与人中是共同知识。因此我们忽略了下列这些所列举的可能：某一个参与人不知道他自己的行动集合或别的参与人的行动集合，或者有某一个参与人 i 不知道参与人 j 是否知道参与人 i 的偏好。这一假设强于我们对某些结论所需要的假设。为正式表示参与人关于博弈知识的弱假设我们需要拓展状态集合的定义，要求每一个状态包含一个关于所进行的博弈的详细规定。

我们现在分离出一个状态的某些性质，这些性质包含着在此状态中行动是与各种解的概念相一致的。我们的第一个结论是如果在某一状态中每个参与人是理性的，他们知道别的参与人的行动且有一个与他的知识相一致的信念，那么在此状态中所选择的行动组合是博弈的一个纳什均衡。

■命题 77.1　假设在状态 $\omega\in\Omega$ 中每个参与人 $i\in N$

a. 知道别的参与人的行动：$P_i(\omega)\subseteq\{\omega'\in\Omega: a_{-i}(\omega')=a_{-i}(\omega)\}$；

b. 有一个与他的知识相一致的信念：$\mu_i(\omega)$ 的支集是 $\{a_{-i}(\omega')\in A_{-i}:\omega'\in P_i(\omega)\}$ 的一个子集；

c. 是理性的：$a_i(\omega)$ 是参与人 i 对 $\mu_i(\omega)$ 的一个最优反应。

那么：$(a_i(\omega))_{i\in N}$ 是 G 的一纳什均衡。

证明：由(c)行动 $a_i(\omega)$ 是参与人 i 对自己信念的一个最优反应，由(b)它赋概率 1 给集合 $\{a_{-i}(\omega')\in A_{-i}:\omega'\in P_i(\omega)\}$；由(a)这集合是 $\{a_{-i}(\omega)\}$。 □

假设每个参与人都知道所有其他参与人的行动是很强的。我们现在要说明的是在两人博弈中我们可用下列假设代替它：若我们加强(c)去要求不

仅每个参与人是理性的且每个参与人知道别的参与人是理性的则每个参与人知道别的参与人的信念。既然该结论涉及混合战略我们现在令考虑下的 78 战略博弈为 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$，这里对每一 $i\in N$ 函数 u_i 的期望值代表了参与人 i 关于 A 上不确定事件的偏好。

■命题 78.1 假设 $|N|=2$ 且在状态 $\omega\in\Omega$ 中每个参与人 $i\in N$。

a. 知道别的参与人的信念：对 $j\neq i$，$P_i(\omega)\subseteq\{\omega'\in\Omega:\mu_j(\omega')=\mu_j(\omega)\}$；

b. 有一个与他的知识相一致的信念：$\mu_i(\omega)$ 的支集是 $\{a_j(\omega')\in A_j:\omega'\in P_i(\omega)\}$ 的一个子集，这里 $j\neq i$。

c. 知道别人是理性的：对任一 $\omega'\in P_i(\omega)$ 行动 $a_j(\omega')$ 是参与人 j 对 $\mu_j(\omega')(j\neq i)$ 的一个最优反应。

那么：混合战略组合 $(\alpha_1,\alpha_2)=(\mu_2(\omega),\mu_1(\omega))$ 是 G 的一个混合战略纳什均衡。

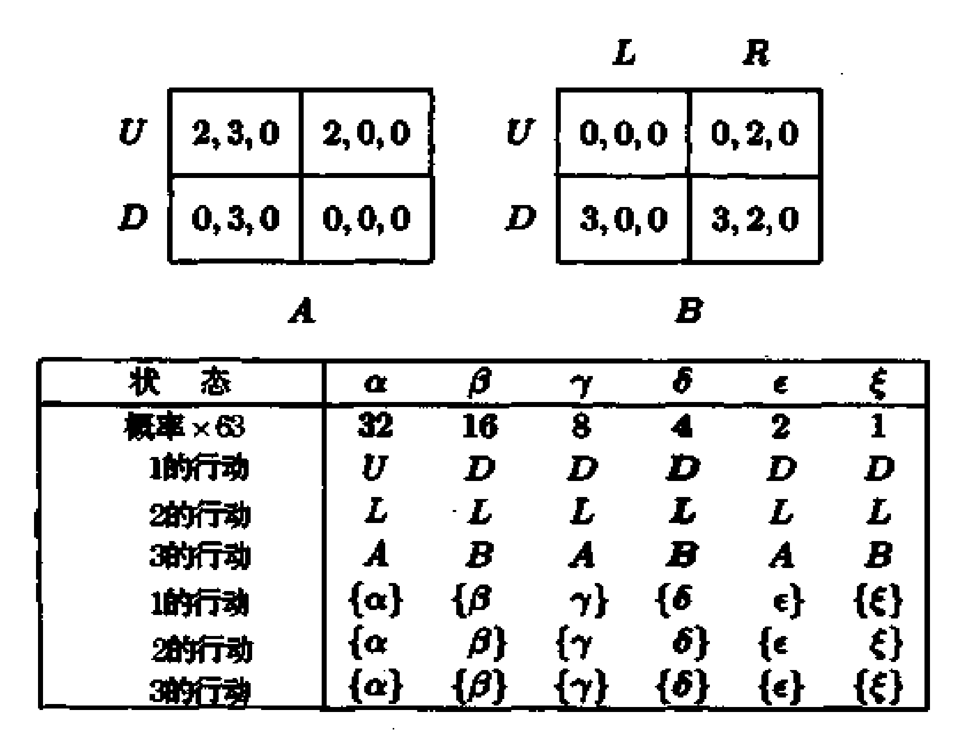
证明：令 a_i^* 为参与人的一个行动，它在 $\alpha_i=\mu_j(\omega)$ 的支集中。由(b)存在一个状态 $\omega'\in P_j(\omega)$ 有 $a_i(\omega')=a_i^*$. 由(c)行动 a_i^* 是参与人 i 对 $\mu_i(\omega')$ 的最优反应，由(a)它等价于 $\mu_i(\omega)$。 □

注意两个命题都不需要参与人从 Ω 上的某一共同先验概率去派生出他们的信念。特别地，注意在(b)中我们仅要求每个参与人的信念与他的知识相一致。同时也应注意博弈是共同知识这一假设在两个结论中都可弱化：在命题 77.1 中假设每个参与人知道他自己的行动集合和偏好就够了，在命题 78.1 中假设博弈是共有知识就够了。

下列的例子表明当有两个以上的参与人时命题 78.1 无类似结果。考虑图 79.1 上部的博弈。(注意参与人 3 的支付常为 0。)令状态集合为 $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\xi\}$，且令参与人的行动函数和信息函数由该图下部分给出；假定参与人的信念来自于同一先验概率，它在表的第一行被给出。

考虑状态 δ。我们断言命题的三个条件都是满足的。条件(b)满足是因为每个参与人在 δ 中的信念决定于同一先验，它还可证明在此状态中每个参与人知道别的参与人的信念且知道别的参与人是理性的。考虑参与人 1。她知道状态要么是 δ 要么是 ϵ，所以她知道参与人 2 的信息是 $\{\gamma,\delta\}$ 或 $\{\epsilon,\xi\}$。在两种情形下，参与人 2 都相信以概率 $\frac{2}{3}$ 由参与人 1 和 3 所选择

的行动二元组为(D,A)和以概率$\frac{1}{3}$选择的是(D,B)。给定这一信念，参与
79 人 2 选择的行动 L 是最优的。所以参与人 1 知道参与人 2 是理性的。



A:

	L	R
U	2,3,0	2,0,0
D	0,3,0	0,0,0

B:

	L	R
U	0,0,0	0,2,0
D	3,0,0	3,2,0

状　态	α	β	γ	δ	ϵ	ξ
概率×63	32	16	8	4	2	1
1的行动	U	D	D	D	D	D
2的行动	L	L	L	L	L	L
3的行动	A	B	A	B	A	B
1的行动	$\{\alpha\}$	$\{\beta$	$\gamma\}$	$\{\delta$	$\epsilon\}$	$\{\xi\}$
2的行动	$\{\alpha$	$\beta\}$	$\{\gamma$	$\delta\}$	$\{\epsilon$	$\xi\}$
3的行动	$\{\alpha\}$	$\{\beta\}$	$\{\gamma\}$	$\{\delta\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\xi\}$

图 79.1　上半部是一个三人博弈，在其中参与人 1 选择两行中的某行；参与人 2 选择两列中的某列；参与人 3 选择两表中的某表。下半部是该博弈中参与人的行动函数、信息函数和信念。

同理参与人 2 知道参与人 1 的信息是$\{\beta,\gamma\}$或$\{\delta,\epsilon\}$。在两种情形下参与人 1 相信以概率$\frac{2}{3}$参与人 2 和 3 选择(L,B)且以概率$\frac{1}{3}$他们选择(L,A)。给定这一信念，她选择的行动 D 是最优的，所以参与人 2 知道参与人 1 是理性的。

参与人 3 知道参与人 1 的信息是$\{\delta,\epsilon\}$和参与人 2 的信息是$\{\gamma,\delta\}$。因此，类似上述证明，参与人 3 知道参与人 1 和 2 是理性的。

在 γ，δ 和ϵ 这三种状态中，参与人 3 的信念是参与人 1 和 2 的行动二元组为(D,L)，因此在状态 δ 中参与人 1 和 2 知道参与人 3 的信念。因为她的支付经常为 0 所以 1 和 2 知道她是理性的。

不过在状态 δ 中这些信念并不能确定一纳什均衡。实际上，各个参与人关于别的参与人行动的信念都不是一致的：参与人 1 相信参与人 3 以概
80 率$\frac{1}{3}$选择 A 而参与人 2 相信参与人 3 以概率$\frac{2}{3}$选择 A。任何一个这种信念与行动 D 和 L 都不能形成博弈的一个混合战略纳什均衡。

使这个例子说明问题的原因在于状态 δ 中参与人1不知道参与人2知道她的信念：参与人1认为状态可能是ϵ，在其中参与人2不知道参与人1是相信参与人3采用 β 还是参与人3以概率$\frac{2}{3}$选 B 和以概率$\frac{1}{3}$选 A。

Aumann 和 Brandenburger(1995)证明了如果所有参与人分享一个共同先验概率，且在某一状态中理性是共有知识及参与人的信念是共同知识，那么即使有多于两个的参与人在那状态中的信念也能形成一个混合战略纳什均衡。关键点是如果参与人1和2的关于参与人3行动的信念是共同知识且如果所有参与人分享同一先验概率，那么信念一定是一样的(通过一个像命题75.1的证明中那样的论证)。

下面的结论正式化了第4章中的论证，使得可理性化的概念建立在一个弱于纳什均衡的关于参与人知识的假设上，它仅要求"所有参与人是理性的"，在所有参与人之间是共同知识。(这个结论并非要依赖有两个参与人的假设，尽管在这儿论述是比较简单的。)

■命题80.1　假定$|N|=2$，在状态 $\omega\in\Omega$ 中，每个参与人的信念与他的知识相一致是参与人之间的共同知识，并且每个参与人是理性的。也就是，假设有一自明事件 $F\ni\omega$ 使得对每一$\omega'\in F$ 和每一$i\in N$。有

a. $\mu_i(\omega')$的支集是$\{a_j(\omega'')\in A_j:\omega''\in P_i(\omega')\}$的一个子集，$j\neq i$；

b. 行动 $a_i(\omega')$是参与人 i 对$\mu_i(\omega')$的一个最优反应。

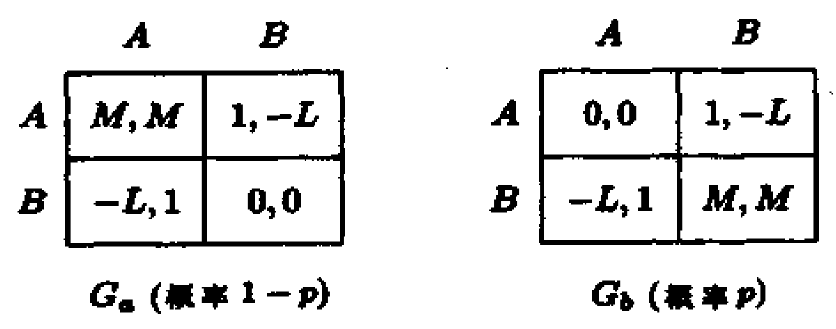
那么，对每一 $i\in N$，行动 $a_i(\omega)$在 G 中是可理性化的。

证明：对每一 $i\in N$。令 $Z_i=\{a_i(\omega')\in A_i:\omega'\in F\}$。由(b)我们知道对任一个 $\omega'\in F$ 行动$a_i(\omega')$是对 $\mu_i(\omega')$的一个最优反应，由(a)它的支集是$\{a_j(\omega'')\in A_j:\omega''\in P_i(\omega')\}$的一个子集。因为 F 是自明的，我们有 $P_i(\omega')\subseteq F$，因而$\{a_j(\omega'')\in A_j:\omega''\in P_i(\omega')\}\subseteq Z_j$。故(使用定义55.1)$a_i(\omega)$是可理性化的。 □

本部分三个结论都从关于他们在那状态中的知识的假设出发导出了参与人在某一特定状态中的行动或信念的内涵。下面练习中的结论基于一个不同类型的假设——即在每一状态中参与人的理性都是共同知识。若该假设满足且所有参与人的信念派生于同一先验，则参与人的行动分布在 Ω 上是一个相关均衡。 81

?练习81.1　假设对所有 $\omega\in\Omega$ 所有参与人是理性的。(因此在每一个状态中他们的理性是共同知识，因为在每一个状态中任何在所有状态中

是真实的事实都是共同知识）试证明如果在每一个状态中每个参与人的信念派生于 Ω 上的一共同先验概率 ρ，其满足对所有 $i\in N$ 和所有 $\omega\in\Omega$，$\rho(P_i(\omega))>0$ 及对每一 $i\in N$ 和每一 $\omega'\in P_i(\omega)$，$a_i(\omega')=a_i(\omega)$，那么 $\langle(\Omega,\rho),(\mathcal{P}_i),(a_i)\rangle$（这里 $\mathcal{P}_i$ 是由 P_i 导致的分割）是 G 的一个相关均衡。（证明很简单，主要任务是理解结论的内容。）



	A	B
A	M,M	1,−L
B	−L,1	0,0

G_a（概率 $1-p$）

	A	B
A	0,0	1,−L
B	−L,1	M,M

G_b（概率 p）

图 81.1 电子邮件博弈的支博弈。参数满足 $L>M>1$ 和 $p<\frac{1}{2}$

5.5 电子邮件博弈

本部分我们研究一种阐述本章所导入的概念的博弈。两个参与人都不得不选取行动 A 或 B 中的某一个。以概率 $p<\frac{1}{2}$ 参与人所涉及的博弈是 G_b；以概率 $1-p$ 涉及的是 G_a。在 G_a 和 G_b 中对于参与人来说选择同一行动是互利的，但是最优的行动依赖于博弈：在 G_a 中结果 (A,A) 是最优的，而在 G_b 中结果 (B,B) 是最优的。支付由图 81.1 所示，那里 $L>M>1$。注意即使一个参与人确定博弈为 G_b，对他来说选择 B 也是有风险的，除非他充分相信他的伙伴也打算选 B。

开始只有参与人 1 知道哪一个是真实博弈。先假定参与人 2 不能获得这一信息。那么我们能将此情形模化为一个贝叶斯博弈（定义 25.1），在其中有两个状态 a 和 b 及由信号函数导致的信息结构：对于参与人 1 为 $\{\{a\},\{b\}\}$，对参与人 2 为 $\{\{a,b\}\}$。这个博弈有惟一纳什均衡：两个参与人都经常选择 A；每个参与人的期望支付是 $(1-p)M$。

82

现在假定参与人 1 能与参与人 2 以某种方式交流从而使得博弈成为他们间的共同知识。在此情形下每个参与人的信息结构为 $\{\{a\},\{b\}\}$，（退化的）贝叶斯博弈有一纳什均衡：在其中每个参与人在状态 a 选择 A，在状态

b 选择 B;每个参与人的支付是 M。

在本部分我们所研究的情形中,参与人能交流,但是对他们公开的手段不允许博弈成为共同知识。特别是,参与人限于在下列协议下通过电脑来交流。若博弈是 G_b,那么参与人 1 的电脑会自动发送一条信息给参与人 2 的电脑,若博弈是 G_a,那么没有信息发送。若电脑收到信息则它会自动地发送一条确认信息;不仅对初始信息,对确认信息及确认信息的确认信息等等也会发送一条确认信息。协议是被设计用来发送确认信息的,因为技术有这样的性质:对任何给定的信息存在一个小概率 $\epsilon>0$ 使之不能达到它的目的地。若信息没到达则交流结束。在交流阶段的末尾每个参与人的屏幕显示他的机器已发送信息的次数。

为了讨论这种情形下参与人的知识,我们需要确定一个状态集合和参与人的信息函数。确定状态集合为 $\Omega=\{(Q_1,Q_2):Q_1=Q_2$ 或 $Q_1=Q_2+1\}$。在状态 (q,q) 中,参与人 1 的电脑发送 q 个信息,它们都到达参与人 2 的电脑,且由参与人 2 的电脑发送的第 q 个信息丢失了。在状态 $(q+1,q)$ 中,参与人 1 的电脑发送 $q+1$ 个信息,除了最后一个其余的全都到达参与人 2 的电脑。参与人 1 的信息函数定义为:若 $q\geqslant 1$ 为 $P_1(q,q)=\{(q,q),(q,q-1)\}$,否则为 $P_1(0,0)=\{(0,0)\}$;参与人 2 的信息函数定义为:对所有 q,$P_2(q,q)=\{(q,q),(q+1,q)\}$。因 $G(Q_1,Q_2)$ 表示在状态 (Q_1,Q_2) 中进行的博弈;即 $G(0,0)=G_a$,否则 $G(Q_1,Q_2)=G_b$。参与人 1 知道在所有状态中的博弈。参与人 2 知道在除了 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的其他所有状态中的博弈。在状态 $(1,0)$ 和 $(1,1)$ 的每个状态中,参与人 1 知道博弈是 G_b,但不知道参与人 2 知道它。同理在状态 $(1,1)$ 和 $(2,1)$ 的每一状态中参与人 2 知道博弈是 G_b 但不知道参与人 1 是否知道参与人 2 知道博弈是 G_b。如此等等。在任一状态 (q,q) 或 $(q+1,q)$ 中,q 的值越大,这种类型的叙述"参与人 i 知道参与人 j 知道参与人 i 知道……博弈为 G_b"就越准确,但没有使博弈为 G_b 是共同知识的状态。

83

若 ϵ 是很小的,则以一大概率每一个参与人在他的屏幕上看到一个很大的数。当参与人 1 在她的屏幕上看到"1",她不能确定参与人 2 是否知道博弈是 G_b,因此可能会迟疑地选 B。但如果在她屏幕上的数字为 17 的话,那么博弈是 G_b 就"几乎"是共同知识了,因此很可能她将遵从更想要的博弈 G_b 的均衡 (B,B)。她的决策将依赖于她的关于若他屏幕上的数字是 16 或 17 则参与人 2 将会做什么的信念。反之,参与人 2 的决策依赖于他的关于若她屏幕上的数字为 16 则参与人 1 将做什么的信念,如此等等。为了研究这些需考虑的事实,我们现在定义如下的贝叶斯博弈,它被称为电子邮件

博弈(electronic mail game)。

- 状态集合为 $\Omega=\{(Q_1,Q_2):Q_1=Q_2$ 或 $Q_1=Q_2+1\}$。
- 每个参与人 i 的信号函数 τ_i定义为 $\tau_i(Q_1,Q_2)=Q_i$。
- 每个参与人在 Ω 上的信念是一样的,它派生于技术(以ϵ 为特征)和以概率 $1-p$ 博弈为 G_a 的假设:$p_i(0,0)=1-p$,对任一非负整数 q 有 $p_i(q+1,q)=p\epsilon(1-\epsilon)^{2q}$和 $p_i(q+1,q-1)=p\epsilon(1-\epsilon)^{2q+1}$。
- 在每一状态(Q_1,Q_2)中支付由博弈 $G(Q_1,Q_2)$确定。

■命题 83.1 电子邮件博弈有惟一纳什均衡,在其中两个参与人经常选择 A。

证明:在状态(0,0)中对于参与人 1 行动 A 是强占优的,所以在任一纳什均衡中当参与人 1 收到信号 0 时便会选择 A。如果参与人 2 未收到信息(即他的信号为 0),那么他知道要么参与人 1 没发送信息(概率为 $1-p$ 的一个事件),要么参与人 1 发送的信息没到达(概率为 $p\epsilon$的一个事件)。如果参与人 2 选择 A,那么既然参与人 1 在状态(0,0)中选择了 A,则无论参与人 1 在状态(1,0)中选择什么,参与人 2 的期望支付至少为$(1-p)M/[(1-p)+p\epsilon]$,如果参与人 2 选择 B 则他的支付至多为$[-L(1-p)+p\epsilon M]/[(1-p)+p\epsilon]$。因此对参与人 2 来说当他的信号为 0 时选择 A 是惟一最优的。

假定现在我们已经证明了对所有满足 $Q_1+Q_2<2q$ 的(Q_1,Q_2)参与人 1 和 2 在任一均衡中都会选择 A。考虑参与人1 当她发出 q 个信息时的决策。在此情形下参与人 1 不能确定是 $Q_2=q$ 还是$Q_2=q-1$。假定她没收到她的第 q 个信号的确认信息,她赋给 $Q_2=q-1$ 的概率是 $z=\epsilon/[\epsilon+(1-\epsilon)\epsilon]>\frac{1}{2}$。因此她相信比起参与人 2 收到信息,她的最后信息没有到达更可能发生(这是论证中的关键点)。如果她选择 B 那么她的期望支付至多是$z(-L)+(1-z)M$(因为在推导的假设下,她知道若 $Q_2=q-1$ 那么参与人 2 选择 A):如果她选择 A 那么她的支付至少为 0。给定 $L>M$ 和 $z>\frac{1}{2}$,她的最优行动因而是 A。由类似证明,如果参与人 1 和 2 在任一均衡中对所有满足 $Q_1+Q_2<2q+1$ 的(Q_1,Q_2)都选择 A,那么参与人 2 当他的信号为 q 时选择A。故每一个参与人根据每个可能的信号选择 A。 □

因此即使两个参与人都知道博弈是 G_b 且即使网络中的噪声(概率为

ϵ)任意小,参与人也好像他们并无信息那样行动并选 A,就如同在没有电子邮件系统时那样做。

如果在你的屏幕上数字为 17,你将如何做?很难想像当 L 稍微超过 M 和ϵ 是小的时候,一个看到屏幕上的数值为 17 的参与人不会选择 B。我们的直觉与博弈理论分析间的冲突使得均衡是自相矛盾的。在这方面有一长串博弈的例子(像有限重复囚徒困境(参看命题 155.1),连锁店博弈(参看第 6.5.1 节)和蜈蚣博弈(第 6.5.2 节),在其中我们的直觉与分析间的矛盾源于这样的事实,即数学推导并不是人类推理过程的一部分。

[注解]

在第 5.1 节所描述的基本知识模型形成于 1950 年和 1960 年,Hintikka (1962)是首创者。共同知识的概念应归于 Lewis(1969)和 Aumann(1976)。Lewis 给了一个非正式的定义(并且讨论了对第 5.1 和第 5.2 节的哲学背景),Aumann 给了一正式定义且证明了命题 75.1。第 5.4 节基于 Aumann and Brandenburger(1995)和 Brandenburger(1992)。(Spohn(1982)包含了一 85 个堪称命题 78.1 先驱者的结论)。第 5.5 节的电子邮件博弈由 Rubinstein (1989)所研究,在精神上它近乎于由电脑科学家所研究的"协作攻击问题"(例如可参看 Halpern(1986))。

第 5.1.3 节中帽子之谜的来源不详;参看 Littlewood(1953, p.3)。练习 76.2 基于 Milgrom 和 Stokey(1982),练习 81.1 基于 Aumann(1987a)。

关于相互作用知识模型(在其中参与人的信息函数不是分割的)的讨论参看 Bacharach(1985)和 Samet(1990)。对文献的综述参看 Binmore and Brandenburger(1990)和 Geanakoplos(1992, 1994)。



第二编

完全信息扩展博弈

扩展博弈(extensive game)具体描述参与人在战略情形中所遇到的决策问题的序列结构。该模型允许我们研究这样的解,即每个参与人不仅可以在博弈开始时考虑他的行动计划,且在任何一个不得不做决策的时点上,他都可以考虑他的行动计划。与此相反,战略博弈模型将我们限于这样的解,即每个参与人选择且仅选择一次他的行动计划,这个计划可包纳无限的变数,但战略博弈模型在博弈中的某些事件已知后则不允许参与人去重新考虑他的行动计划。

扩展博弈的一般模型不要求每个参与人在做决策时都知道以前所发生的所有事件。我们将在第三编研究这种模型。在本编我们考察一个简单模型,每个参与人在博弈中的每个时点上都完全地知道所有参与人以前的行动。在第6章我们描述基本模型,在随后的三章我们研究两类有趣的具有完全信息的扩展博弈:轮流出价讨价还价博弈(第7章)和重复博弈(第8、第9章)。在第10章我们提供一些关于实施理论的主要结论(同时使用战略和扩展博弈模型)。

89

第 6 章

完全信息扩展博弈

本章将研究具有完全信息的扩展博弈模型。我们将论证在这一模型中纳什均衡解的概念是不令人满意的，因为它忽略了决策问题的序列结构。我们还将定义子博弈精炼均衡这一概念，在其中参与人被要求随计划进行去重估他的计划。在本章末尾我们将把这一解的概念与反复剔除弱劣行动的解的概念作比较。

6.1 完全信息扩展博弈

6.1.1 定义

扩展博弈是对参与人在战略情形中所遇到的决策问题的序列结构的详细描述。如果每个参与人在做决策时都完全知道以前所发生的所有事件，则在这一博弈中存在完全信息。为了简便我们将从这样的博弈开始，即没有两个参与人同时作决策，且所有相关行动都是参与人所为（无随机因素干扰）。（我们将在 6.3 部分除掉这两个限制。）

▶定义 89.1 **完全信息扩展博弈**（extensive game with perfect information）有下列组成部分：

• 一个集合 N（参与人的集合）。

90

• 一个序列集合 H（有限或无限的）满足下列三条性质：

• 空序列 ϕ 是 H 的一个元素。

• 如果 $(a^k)^{\infty}_{k=1,\cdots,K} \in H$（这里 K 可能是无限的）且 $L < K$，那么 $(a^k)^{\infty}_{k=1,\cdots,L} \in H$。

• 如果一个无限序列$(a^k)_{k=1,\cdots}$对每个正整数 L 满足$(a^k)_{k=1,\cdots,L}\in H$ 那么$(a^k)_{k=1,\cdots}\in H$。

(H 的每个元素都是一段**历史**(history);一段历史的每一组成部分都是一个参与人采取的**行动**。)一段历史$(a^k)_{k=1,\cdots,K}\in H$ 是**终点**(terminal)如果它是无限的或如果没有 a^{K+1}使得$(a^k)_{k=1,\cdots,K+1}\in H$。终点历史集合由 Z 表示。

• 一个函数 P,它赋给每个非终点历史($H\setminus Z$ 的每一元素)一个 N 的元素。(P 是**参与人函数**(player function),$P(h)$是历史 h 后采取行动的参与人。)

• 对每个参与人 $i\in N$ 有一个Z 上的偏好关系$\succsim_i$(参与人 i 的**偏好关系**)。

有时为了方便在确定一个扩展博弈的结构时不须确定参与人的偏好,我们称组成部分满足定义中前三个条件的一个三元组$\langle N,H,P\rangle$为一**完全信息扩展博弈形式**(extensive game form with perfect information)。

如果可能的历史集合 H 是有限的,则博弈是有限的。如果最长历史的长度是有限的,则博弈有一有限边界(finite horizon)。令 h 为一段长度为k的历史,我们用(h,a)表示长度为 $k+1$ 且包含由 a 紧随的h 的历史。

本章从头至尾将一个完全信息扩展博弈称为"扩展博弈"。我们解释这一博弈如下。在任一非终点历史 h 之后,参与人 $P(h)$从下列集合选择一个行动

$$A(h)=\{a:(h,a)\in H\}.$$

空历史是博弈的起始点;我们有时称它为*初始历史*(initial history)。在这点上参与人 $P(\varnothing)$选择 $A(\varnothing)$的一个元素。对这集合中每个可能的选择 a^0 参与人 $P(a^0)$随后选择集合 $A(a^0)$的一个元素;这个选择决定下一个参与人如何行动,如此等等。一段历史在其之后没有选择要做,则它是终点。注意一段历史可能是一无限行动序列。将一段历史定义为一个序列(而不是作为一个更复杂的数学对象,像一序列串)包含了这样的假设,即在任一无限长历史之后没有行动可被采用,所以每一段这种历史都是终点。同在战略博弈情形中一样,我们经常通过给定代表偏好的支付函数来确定参与人关于终点历史的偏好。

◇例 91.1 两人使用下列过程去分配两个想要的独立的不可分割的物体。他们中的某一个人提出一种分配方式,另一个人可能接受也可能拒 91

绝。如果拒绝，两人都得不到任何东西。每个人仅关心所得的物体数量。

对个人困境进行建模的一个扩展博弈是$\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$，其中，

- $N=\{1,2\}$；
- H 包括 10 段历史：$\varnothing,(2,0),(1,1),(0,2),((2,0),y),((2,0),n),((1,1),y),((1,1),n),((0,2),y),((0,2),n)$；
- $P(\varnothing)=1$ 和 $P(h)=2$，(对任一非终点历史 $h\neq\varnothing$)；
- $((2,0),y)\succ_1((1,1),y)\succ_1((0,2),y)\sim_1((2,0),n)\sim_1((1,1),n)\sim_1((0,2),n)$ 且 $((0,2),y)\succ_2((1,1),y)\succ_2((2,0),y)\sim_2((0,2),n)\sim_2((1,1),n)\sim_2((2,0),n)$。

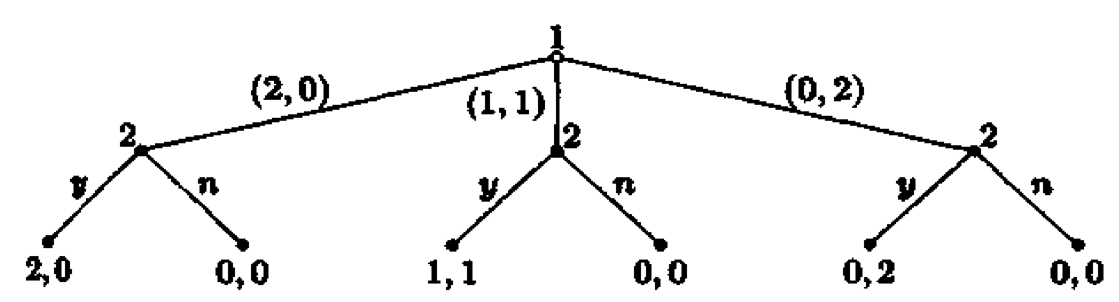


图 91.1　一个扩展博弈，它模化了例 91.1 中在两人间分配两个独立的不可分割的物体的过程

该博弈一个便利的表示见图 91.1。图表顶部的小圈代表初始历史 $\varnothing$ (博弈的起始点)。这个圈上的 1 指 $P(\varnothing)=1$(参与人 1 首先行动)。从圈发出的三个线段对应于 $A(\varnothing)$的三个元素(在初始历史参与人 1 可能的行动)；在三个线段旁的标记是行动的名称，$(k,2-k)$是 k 个物体给参与人 1 和剩下的 $2-k$ 个给参与人 2 的提议。每条线段都指向一个小圆饼，在它旁边的标记 2 指参与人 2 在任一长度为 1 的历史后采取一行动。在从圆饼发出的线段旁的标记是参与人 2 的行动名，y 意指“接受”，n 意指“拒绝”。端点历史之下的数字是代表了参与人偏好的支付。(在每一个二元组中第一个数代表了参与人 1 的支付，第二个数字代表了参与人 2 的支付。)

92　图 91.1 表示了扩展博弈的第一个定义，在此定义中基本的成分是树(无圈的连通图)。在这种形式中每个结对应一段历史且任一对相连的结对应于一个行动；行动名称不是定义的一个部分。这个定义更常用，不过我们发现定义 89.1 将参与人的行动作为基本要素，它更自然。

6.1.2　战略

在扩展博弈中参与人的一个战略是对每段历史(在它之后轮着他去行

动)确定由参与人选择的行动。

▶定义 92.1 在一个完全信息扩展博弈$\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$中参与人$i\in N$的**一个战略**(strategy of player i)是一个函数,它对每个非终点历史$h\in H\setminus Z$(满足$P(h)=i$)赋给$A(h)$中的一个行动。

注意在博弈$\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$中参与人的战略仅依赖于博弈形式$\langle N,H,P\rangle$。

为了阐述战略的概念让我们来考虑图 91.1 中的博弈。参与人 1 仅在初始历史$\varnothing$之后采取一个行动,所以我们对于他的每一个战略可以用这段历史后所能采取的三个可能行动(2,0),(1,1)和(0,2)中的一个来确定。参与人 2 在三段历史(2,0),(1,1),(0,2)中的每个之后采取一个行动并且在每一情形下他有两个可能行动。因此我们可用一个三元组$a_2b_2c_2$来确定他的每一个战略,这里a_2、b_2和c_2是在历史(2,0),(1,1)和(0,2)之后采取的行动。参与人 2 的战略$a_2b_2c_2$的解释是它是一个权变计划:若参与人 1 选择(2,0)则参与人 2 选择a_2;若参与人 1 选择(1,1)则参与人 2 选择b_2;若参与人 1 选择(0,2)则参与人 2 将选c_2。

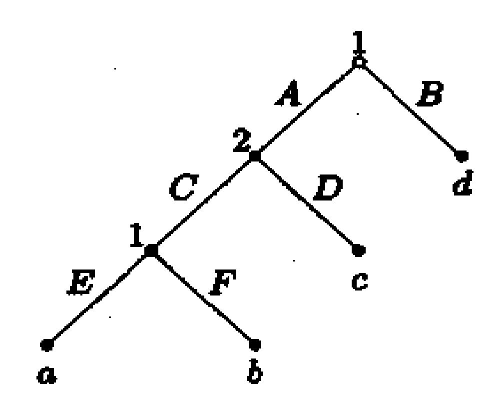


图 93.1 参与人 1 与参与人 2 前后都行动向扩展博弈

图 93.1 中的博弈阐述了重要的一点:一个战略对每段历史(在此历史之后轮着参与人采取行动)确定由参与人选择的行动,即使在战略被领悟的情况下对永远到达不了的历史也一样。在此博弈中参与人 1 有四个战略AE,AF,BE,BF。那即是,她的战略在历史(A,C)后确定一个行动,即使该战略已确定在博弈开始时她选择B。在此意义下战略不同于我们自然所认为的战略是行动计划;在第 6.4 节我们还要谈及这点。正如我们马上要看到的那样,为了某些目的我们可以将BE和BF视为同一战略;不过,在别的情形下将它们区分开是很重要的。 93

对扩展博弈$\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$中的每个战略组合$s=(s_i)_{i\in N}$我们定义$s$的**结果**(outcome)$O(s)$为当每个参与人$i\in N$遵从$s_i$的规程时由$s$所导致的终点历史。也就是$O(s)$是(可能无限的)历史$(a^1, \cdots, a^K)\in Z$使得对$0\leqslant k<K$我们有$s_{P(a^1,\cdots,a^k)}(a^1,\cdots,a^k)=a^{k+1}$。

同在战略博弈中一样,我们可定义一个混合战略为(纯)战略集合上的一个概率分布。在完全信息扩展博弈中考虑这种战略只要稍加点东西。因此当参与人采取行动时他们并不完全知道信息的扩展博弈;在这类博弈中混合战略概念有更多意义。

6.1.3 纳什均衡

对于扩展博弈我们定义的第一个解的概念忽略了博弈的序列结构;它把战略当作在采取行动前做一次且仅做一次的选择。

▶定义 93.1 **完全信息扩展博弈$\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$的纳什均衡**是一战略组合$s^*$使得对每个参与人$i\in N$我们有

$O(s^*_{-i}, s^*_i)\succsim_i O(s^*_{-i}, s_i)$,对参与人$i$的每个战略$s_i$.

相应地,我们能定义扩展博弈Γ的纳什均衡为定义如下的由Γ派生的战略博弈纳什均衡。

94 ▶定义 94.1 **完全信息扩展博弈$\Gamma=\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$的战略形式**(strategic form of the extensive game with perfect information)是战略博弈$\langle N, (S_i), (\succsim'_i)\rangle$,在其中对每个参与人$i\in N$有

• S_i是Γ中参与人i的战略集合。

• $\succsim'_i$由$s\succsim'_i s'$确定当且仅当对每一个$s\in\times_{i\in N}S_i$和$s'\in\times_{i\in N}S_i$有$O(s)\succsim_i O(s')$。

?练习 94.2 令G为一个两人战略博弈$\langle\{1,2\}, (A_i), (\succsim_i)\rangle$,其中每个参与人有两个行动:对$i=1,2$有$A_i=\{a'_i, a''_i\}$。试说明$G$是完全信息扩展博弈的战略形式当且仅当要么对某一$a_1\in A_1$,我们对$i=1,2$有$(a_1, a'_2)\sim_i(a_1, a''_2)$,或者对某一$a_2\in A_2$我们对$i=1,2$有$(a'_1, a_2)\sim_i(a''_2, a_2)$。

如果纳什均衡是我们为扩展博弈所定义的惟一解,那么我们可以定义

范围更小的一个战略：我们可以要求一个战略仅在与它在博弈中较早时点上所确定的行动并不一致的历史之后，去确定一个参与人的行动。之所以这样，是因为战略组合 s 的结果 $O(s)$ 在与 s_i 不一致的权变之后并不受任一参与人 i 的战略 s_i 所确定的行动的影响。准确地说，我们能定义参与人 i 的一个简化战略(reduced strategy)为一函数 f_i，它的定义域是 $\{h \in H: P(h)=i\}$ 的一个子集且有下列性质：(ⅰ)它将 f_i 定义域中的每段历史 h 与 $A(h)$ 中的一行动联系起来；(ⅱ)满足 $P(h)=i$ 的一段历史 h 在 f_i 的定义域里当且仅当在 h 中参与人 i 的所有行动都由 f_i 决定(也就是，若 $h=(a^k)$ 和 $h'=(a^k)_{k=1,\cdots,L}$ 是满足 $P(h')=i$ 的 h 的一个子集，那么 $f_i(h')=a^{L+1}$)。参与人 i 的每一个简化战略都对应于参与人 i 的一个战略集合；对于别的参与人的任一战略向量，在这个集合中的每一个战略都产生同一结果(也就是，集合中的战略是结果等价的(outcome-equivalent)。扩展博弈的纳什均衡集合对应于战略博弈的纳什均衡，在其中每个参与人的行动集合是他的简化战略集合。(一个战略的完美定义对于子博弈精炼均衡是必要的，我们将在下一部分定义它。)

作为参与人在扩展博弈中简化战略集合的一个例子，可以考虑图 93.1 中的博弈。参与人 1 有三个简化战略：一个由 $f_i(\varnothing)=B$(具有定义域 $\{\varnothing\}$)确定，一个由 $f_i(\varnothing)=A$ 和 $f_i(A,C)=E$(具有定义域 $\{\varnothing,(A,C)\}$)确定，一个由 $f_i(\varnothing)=A$ 和 $f_i(A,C)=F$(具有定义域 $\{\varnothing,(A,C)\}$ 确定。

对于一些博弈，在下列意义下某个参与人的一些简化战略是等价的：不管别的参与人的战略，对所有参与人它们产生同样的支付(尽管不是同一结果)。也就是从参与人支付的观点看，对一些博弈在战略的定义中冗余成分，其超过了由简化战略的概念所得到的。例如，在图 93.1 的博弈中若 $a=b$，则参与人 1 的两个简化战略(其中她在博弈开始时选择 A)从支付的观点看是等价的。为了抓住这一深层次的冗余及由简化战略概念所得到的冗余，我们可定义下列战略形式的变形。 95

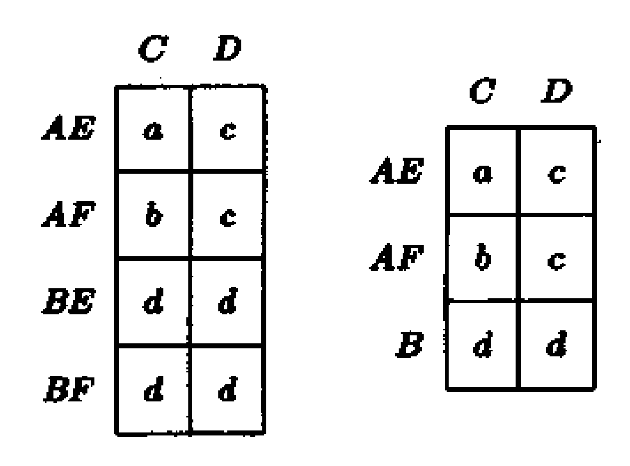
▶定义 95.1 令 $\Gamma=\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$ 为一完全信息扩展博弈且令 $\langle N,(Si),(\succsim'_i)\rangle$ 为它的战略形式。对任一 $i \in N$ 定义参与人 i 的战略 $s_i \in S_i$ 和 $s'_i \in S_i$ 为等价的如果对每一 $s_{-i} \in S_{-i}$ 我们有：对所有 $j \in N$ 有 $(s_{-i},s_i) \sim'_j (s_{-i},s'_i)$。$\Gamma$ **的简化战略形式**(reduced strategic form)是战略博弈 $\langle N,(S'_i),(\succsim''_i)\rangle$，其中对每一 $i \in N$，每个集合 S'_i 包含 S_i 中每个等价战略的一个元素，并且 $\succsim''_i$ 是由 $\succsim'_i$ 导致的关于 $\times_{j\in N}S'_j$ 的偏好次序。

(注意这个定义指定了在简化战略形式中行动的名称;这些行动的每个选择都确定了一个不同的简化战略形式。不过,在任何传统的博弈理论分析中行动的名称没有多大的意义,所以我们称为博弈简化战略形式。)

图 93.1 中博弈的战略形式和简化战略形式在图 96.1 中表示出来了。如果 $a=b$,那么参与人 1 的战略 AE 和 AF 是等价的,所以参与人 1 在博弈的简化战略形式中只有两个行动。

下个例子阐明了纳什均衡的概念并揭示了该均衡可能具有的一个不受欢迎的特征。

◇例 95.2　图 96.2　中的博弈有两个纳什均衡:(A,R)和(B,L),支付组合为(2,1)和(1,2)。战略组合(B,L)是一纳什均衡,因为给定在历史 A 后参与人 2 选择 L,则对参与人 1 来说在博弈开始时选择 B 是最优的(若她选 A,则给定参与人 2 的选择她获得 0 而非 1);给定参与人 1 的选择 B 则对参与人 2 来说选择 L 是最优的(因为他的选择不会使结果变化。)



	C	D
AE	a	c
AF	b	c
BE	d	d
BF	d	d

	C	D
AE	a	c
AF	b	c
B	d	d

图 96.1　战略形式(左)和简化战略形式(右)

我们将一个非终点历史解释为一个时点(在此点上一个参与人可能会重估他的行动计划)导致了一个关于此博弈中纳什均衡(B,L)缺乏说明力的讨论。如果历史 A 将发生,那么参与人似乎会选 R 而非 L,因为这样做他能获得一个更高的支付。均衡(B,L)由若参与人 1 选择 A,则参与人 2 选择 L 的“威胁”所维持。这个威胁并不可信,因为参与人 2 没有办法让自己去做这一选择。因此参与人 1 会确信若她选择 A,则参与人 2 将选择 R;因为她对结果(A,R)的偏好优于纳什均衡结果(B,L),所以她愿去偏离均衡且选择 A。在下一部分我们将定义一个抓住了这些可能发生事件

96

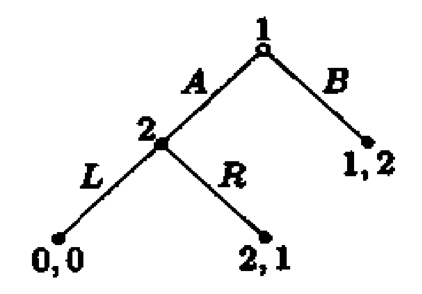


图 96.2　一个有两个参与人的扩展博弈的例子

的均衡的概念。

◇例 96.1　图 91.1 中博弈的纳什均衡是((2,0), *yyy*), ((2,0), *yyn*), ((2,0) *yny*,), ((2,0), *ynn*), ((1,1), *nyy*), ((1,1), *nyn*), ((0,2), *nny*), ((2,0), *nny*)和((2,0), *nnn*)。前四个导致分配(2,0),随后两个导致分配(1,1),最后两个各导致分配(0,2)和(0,0)。除了((2,0), *yyy*)和((1,1), *nyy*)所有这些均衡都涉及参与人 2 在某段历史之后缺乏说服力的一个行动(因为他拒绝了至少给他一个物体的提议);像例 95.2 中的均衡(B, L) 97 一样,它们都被我们现在定义的均衡概念排除了。

6.2　子博弈精炼均衡

以前一部分结束时的讨论为动因,我们现在定义子博弈精炼均衡的概念。我们先定义子博弈的概念。

▶定义 97.1　**完全信息扩展博弈** $\Gamma=\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$ **继承历史** h **的子博弈**(the subgame of the extensive game with perfect information that follows the history)是扩展博弈 $\Gamma(h)=\langle N,H|_h,P|_h,(\succsim_i|_h)\rangle$,这里 $H|_h$ 是满足$(h,h')\in H$ 的行动序列h'的集合,$P|_h$ 由对每一$h'\in H|_h$ 有$P|_h(h')=P(h,h')$确定,$\succsim_i|_h$ 由 $h'\succsim_i|_h h''$确定当且仅当$(h,h')\succsim_i(h,h'')$。

我们现在定义的均衡概念要求在每段历史之后给定别的参与人的战略,且每个参与人的战略所规定的行动是最优的。给定扩展博弈 Γ 中参与人 i 的战略 s_i 和一段历史 h,用 $s_i|_h$ 表示在子博弈 $\Gamma(h)$中由 s_i 所导致的战

略(即对每一 $h'\in H|_h$ 有 $s_i|_h(h')=s_i(h,h')$;用 O_h 表示 $\Gamma(h)$的结果函数。

▶定义 97.2 **完全信息扩展博弈 $\Gamma=\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$ 的一个子博弈精炼均衡**(a subgame perfect equilibrium of an extensive game with perfect information)是一战略组合 s^* 使得对每个参与人 $i\in N$ 和每段满足 $P(h)=i$ 的非终点历史 $h\in H\setminus Z$ 我们有对子博弈 $\Gamma(h)$中参与人 i 的每个战略 s_i,

$$O_h(s^*_{-i}|_h,s^*_i|_h)\succsim_i|_h O_h(s^*_{-i}|_h,s_i).$$

等价地,我们可定义子博弈精炼均衡为 Γ 中的战略组合 s^* 满足对任一段历史 h 战略组合 $s^*|_h$ 是子博弈 $\Gamma(h)$的一个纳什均衡。

子博弈精炼均衡的概念排除了这样的纳什均衡,即参与人的威胁并不可信,例如图 96.2 的博弈中惟一的子博弈精炼均衡是(A,R),图 91.1 中的博弈中仅有的子博弈精炼均衡是$((2,0),yyy)$和$((1,1)nyy)$。

◇例 97.3 斯塔克伯格博弈(Stackelberg games)。斯塔克伯格博弈是两人完全信息扩展博弈,在其中一个"领导者"从集合 A_1 中选择一个行动,

98

另一"追随者"在知道领导者的选择后从集合 A_2 中选择一个行动。经常用于经济学中的这类博弈的解是子博弈精炼均衡解(尽管这个术语不常用)。斯塔克伯格博弈的一些(非全部)子博弈精炼均衡对应下列最大化问题的解

$$\max_{(a_1,a_2)\in A_1\times A_2} u_1(a_1,a_2),\text{以 } a_2\in\arg\max_{a'_2\in A_2} u_2(a_1,a'_2)\text{为条件},$$

这里 u_i 是代表参与人 i 的偏好的支付函数。如果每个参与人 i 的行动集合 A_i 是紧的,且支付函数 u_i 是连续的,则该最大化问题有解。

?练习 98.1 试举一例:一个斯塔克伯格博弈的一子博弈精炼均衡并不对应于上述最大化问题的一个解。

为了验证战略组合 s^* 是子博弈精炼均衡,定义 97.2 要求我们对每个参与人 i 和每个子博弈去检验不存在导致参与人 i 所偏好的结果的战略。下列的结论说明了在一有限边界博弈中对每个参与人 i 和每一子博弈我们可将注意力限于这些可选择的战略——仅在一段历史之后在由这些战略所确定的行动中它们不同于 s^*_i。特别地,一个战略组合是一子博弈精炼均衡,当且仅当对每个子博弈首先采取行动的参与人通过仅改变他的初始行动不能获得一个更好的结果。对于一扩展博弈 Γ 用 $l(\Gamma)$表示在 Γ 中最长历史的长度;我们称 $l(\Gamma)$为 Γ 的长度。

■引理 98.2 (一次偏离性质)(The one deviation property)令 $\Gamma=\langle N,H,P,(\succsim_i|_h)\rangle$ 为一有限边界完全信息扩展博弈。战略组合 s^* 是 Γ 的子博弈精炼均衡当且仅当对每一个参与人 $i\in N$ 和每段满足 $P(h)=i$ 的历史 $h\in H$ 我们有:对子博弈 $\Gamma(h)$ 中参与人 i 的每个战略 s_i

$$O_h(s^*_{-i}|_h,s^*_i|_h)\succsim_i|_h O_h(s^*_{-i}|_h,s_i)$$

其中 s_i 在 $\Gamma(h)$ 的初始历史之后仅在由它所规定的行动中不同于 $s^*_i|_h$。

证明:如果 s^* 是 Γ 的一个子博弈精炼均衡,则它满足条件。现在假定 s^* 不是子博弈精炼均衡;假定参与人 i 在子博弈 $\Gamma(h')$ 中能有利地偏离(即采取别的行动可获得更好的结果)。那么在 $\Gamma(h')$ 中存在参与人 i 的一个有利的偏离战略,满足对具有多个阶段且不大于 $\Gamma(h')$ 长度的历史 h,使得 $s_i(h)\neq(s^*_i|_{h'})(h)$;因为 Γ 有有限边界,则这个数是有限的。从 $\Gamma(h')$ 中参与人 i 的所有有利的偏离中选取一战略 s_i,满足使 $s_i(h)\neq(s^*_i|_{h'})(h)$ 的 h 的长度是最小的。令 h^* 为 $\Gamma(h')$ 的满足 $s_i(h)\neq(s^*_i|_{h'})(h)$ 最长历史 h。那么 $\Gamma(h^*)$ 的初始历史是 $\Gamma(h^*)$ 中惟一这样的历史,即在该点由 s_i 所确定的行动不同于由 $s^*_i|_{h'}$ 所确定的行动。进一步说,$s_i|_{h^*}$ 是 $\Gamma(h^*)$ 中的一个有利偏离,因为不是那样的话,在 $\Gamma(h^*)$ 中就有一个有利偏离在比 s_i 更短的历史后不同于 $s^*_i|_{h'}$。因此 $s_i|_{h^*}$ 是 $\Gamma(h^*)$ 中的一个有利偏离,在 $\Gamma(h^*)$ 的初始历史之后仅在由它所规定的行动中不同于 $s^*_i|h^*$。 □

99

☑练习 99.1 试举一个不具有一次偏离性质的有限边界博弈的例子。

我们现在要证明每个有限完全信息扩展博弈都有一个子博弈精炼均衡。我们的证明是构造式的:对博弈中每一个最长的非终点历史,我们选择一个对于轮到要行动的参与人来说是最优的行动,并且用一个这样的终点历史来代替那些历史,即在这个终点历史中,支付组合是最优行动被选择后所产生的;然后我们重复这个过程,一直回到博弈的开始。(下面的结论是著名的库恩(Kuhn)定理)

■命题 99.2 每一个有限完全信息扩展博弈都有一个子博弈精炼均衡。

证明:令 $\Gamma=\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$ 为一有限完全信息扩展博弈。我们通过对 $l(\Gamma(h))$ 的归纳来构造 Γ 的一个子博弈精炼均衡;同时我们定义一个将每段历史 $h\in H$ 与一个终点历史相联系起来的函数 R,并且要证明这个历史是子博弈 $\Gamma(h)$ 的子博弈精炼均衡结果。

如果 $l(\Gamma(h))=0$(即 h 是 Γ 的终点历史)定义 $R(h)=h$。现在假定

$R(h)$的定义域是这样的:对某个 $k\geqslant 0$,所有满足 $l(\Gamma(h))\leqslant k$ 的 $h\in H$。令 h^* 为满足 $l(\Gamma(h^*))=k+1$ 的一段历史,且令 $P(h^*)=i$。因为 $l(\Gamma(h^*))=k+1$,我们对所有 $a\in A(h^*)$有 $l(\Gamma(h^*,a))\leqslant k$。定义 $s_i(h^*)$ 为 $R(h^*,a)$在 $a\in A(h^*)$上的一个$\succsim_i$ 最大化者,并且定义 $R(h^*)=R(h^*,s_i(h^*))$。通过归纳我们现在已定义了 Γ 中的一个战略组合 s;由引理 98.2 这个战略组合是 Γ 的一个子博弈精炼均衡。 □

该证明中所用的方法常被称为逆向归纳法(backwards induction)。除了作为证明该命题的一个技术手段,这个方法也是计算有限博弈子博弈精炼均衡集合的算法。子博弈精炼均衡概念的部分奇妙之处为派生于该算法描述了这样的方法,即只要边界是相对短的,则对参与人分析这种博弈来说似乎是自然的。

100

配以第 2.5 节中关于严格竞争博弈的结论,我们能从上述结论中得到的一个推论是:象棋博弈中的每个参与人都有一个确保其均衡支付的战略(该结论最早由 Zermelo(1913)证明)。因为象棋有有限多可能的历史(一旦一个位置被重复三次则博弈宣布为平局),命题 99.2 表明了它有一个子博弈精炼均衡,且因而也有一个纳什均衡;因为它是严格竞争的,命题 22.2 表明了均衡支付是惟一的,且一个参与人的任一纳什均衡战略都能保证这个参与人得到他的均衡支付。要么白方有一种保证它能赢的战略,要么黑方有一种保证博弈的结果对它来说或赢或平局的战略。

? 练习 100.1 试证明 Kuhn 定理(命题 99.2)中的条件"博弈是有限的"不能被条件"它有一有限边界"或条件"在任一段历史每个参与人有有限多可能的行动"所代替。

注意 Kuhn 定理并未谈及惟一性。实际上图 91.1 中的博弈有两个子博弈精炼均衡((2,0), yyy)和((1,1), nyy),按照每个参与人偏好的说法它们是不等价的。不过,显然一个博弈若在其中没有参与人对任何两个结果的偏好不一样则它有一个惟一的子博弈精炼均衡。进一步地说,只要任一参与人是无差别的,则所有参与人对任何两个结果偏好都一样,于是即使可能有多于一个的子博弈精炼均衡,所有参与人对所有子博弈精炼均衡偏好都一样。这个结论在下列练习中被表示出来。

? 练习 100.2 如果只要对某一 $i\in N$ 有 $z\sim_i z'$ 则对所有 $j\in N$ 有 $z\sim_j z'$,那么说一个有限完全信息扩展博弈满足非无差别条件(no indiffer-

ence condition)。这里 z 和 z' 是终点历史。试通过应用对子博弈长度的归纳来证明每个参与人对满足该条件博弈的所有子博弈均衡结果是无差别的。同时证明如果 s 和 s' 是子博弈精炼均衡，那么 s'' 也是，这里对每个参与人 i 战略 s''_i 等价于 s_i 或 s'_i(即博弈的均衡是可互换的)。 101

?练习 101.1 试证明扩展博弈 Γ 的一个子博弈精炼均衡也是由下列方法从 Γ 得到的博弈的一个子博弈精炼均衡：删除在均衡中不能到达的子博弈并将已删除的子博弈中均衡的结果赋给这样产生的终点历史。

?练习 101.2 令 s 为完全信息扩展博弈 Γ 中的一个战略组合；假设 $P(h)=i$，$s_i(h)=a$ 和 $a'\in A(h)$ 满足 $a'\neq a$。考虑由 Γ 对某一个行动序列 h' 删除所有形如 (h,a',h') 的历史所得到的博弈 Γ'，且令 s' 为 Γ' 中由 s 所导致的战略组合。试证明如果 s 是 Γ 的一子博弈精炼均衡，那么 s' 是 Γ' 的一子博弈精炼均衡。

?练习 101.3 军队 1 和 2 正为争夺一个岛而战斗，该岛开始是由军队 2 的一个营所占领的。军队 1 有 K 个营，军队 2 有 L 个。只要该岛由某支军队占领，另一支军队就可发动一场进攻。战斗的结果是占领的营和攻击中的一个营被消灭；攻击军队胜，且只要它有剩下的营，则只要一个营来占领该岛。每支军队的指挥官对最大化生存的营的数量感兴趣，且将对岛的占领视为值一个营。(如果在一场战斗后两支军队都无剩余的营，那么每个指挥官的支付为 0。)将此情形作为一个扩展博弈来分析，并利用子博弈精炼均衡概念来预测胜者为 K 和 L 的一个函数。

6.3 博弈定义的两种扩展

像在定义 89.1 中一样，完全信息扩展博弈模型很容易从两个方面扩展。

6.3.1 外部不确定性

首先我们扩展该模型使其涵盖有某一外部不确定性。一个完全信息和机会行动扩展博弈(extensive game with perfect information and chance

moves)是一五元组$\langle N, H, P, f_c, (\succsim_i)\rangle$，这里同前，$N$ 是一个有限参与人集合，H 是历史集合，且

102

- P 是一个从 H 中的非终点历史到 $N\cup\{c\}$ 上的函数。(若 $P(h)=c$，则机会确定历史 h 后所采取的行动。)
- 对每个满足 $P(h)=c$ 的 $h\in H$，$f_c(\cdot|h)$是 $A(h)$上的一个概率测度；每个这种概率测度都被假定为与其他任一个这种概率测度独立。($f_c(a|h)$是历史 h 后 a 发生的概率。)
- 对每个参与人 $i\in N$，$\succsim_i$ 是关于终点历史集合上的不确定事件的偏好关系。

对每个参与人 $i\in N$ 战略的定义如前。一个战略组合的结果是关于终点历史的一个概率分布。子博弈精炼均衡的定义也同前(参看定义 97.2)。

? 练习 102.1 试证明一个完全信息和机会行动扩展博弈同时满足一次偏离性质(引理 98.2)和 Kuhn 定理(命题 99.2)。

6.3.2 同时行动

假定全部参与人在一段历史之后同时行动，并且他们中的每一位在做选择时都完全地知道以往所有的事件，我们可将完全信息扩展博弈的定义修改如下。一个完全信息和同时行动扩展博弈(extensive game with perfect information and simultaneous moves)是一四元组$\langle N, H, P, (\succsim_i)\rangle$，这里 N，H 和对每个参与人 i 的 $\succsim_i$ 都与定义 89.1 中一样，P 是一个对每个非终点历史赋一个参与人集合的函数，且 H 和 P 联合满足下列条件：对每段非终点历史 h，有一集合族$\{A_i(h)\}_{i\in P(h)}$，对于它 $A(h)=\{a:(h,a)\in H\}=\times_{i\in P(h)}A_i(h)$。

这种博弈中的一段历史是一个向量序列；每个向量 a^k 的组成部分是在历史$(a^l)_{l=1}^{k-1}$之后由轮到行动的参与人所选择的行动。在其中每个参与人 $i\in P(h)$可在历史 h 之后做选择的行动集合是 $A_i(h)$；其解释是在 $P(h)$ 中参与人的选择是同时做出的。

在这种博弈中参与人 $i\in N$ 的一个战略是将 $A_i(h)$中的一个行动赋给每个满足 $i\in P(h)$的非终点历史 h 的一个函数。除了“$P(h)=i$”由“$i\in P(h)$”代替外，子博弈精炼均衡的定义同在定义 97.2 中的一样。

[?]练习 103.1 假设三个参与人用下述过程分享一块蛋糕。参与人 1 首先提出一种分法,参与人 2 和 3 同时回答为"yes"或"no"。如果参与人 2 和 3 都说:"yes",那么分割完成;否则任何参与人一无所得。每个参与人的偏好是宁多勿少。试将此情形系统表达成一个同时行动扩展博弈,并找出它的子博弈精炼均衡。 103

[?]练习 103.2 考虑下述两人博弈。开始参与人 1 可选择"停"或"继续"。如果她选择停则博弈以支付(1,1)结束;如果她选择继续,则所有参与人同时报出非负整数且每个参与人的支付是这些数字的结果。试将此情形系统表达成一个同时行动扩展博弈并找出它的子博弈精炼均衡。

[?]练 103.3 试证明对于同时行动扩展博弈满足一次偏离性质(引理 98.2)而不满足 Kuhn 定理(命题 99.2)。

6.4 关于战略的解释

正如我们已经注意到的,战略的定义(92.1)并不对应于一个行动计划,因为它要求参与人在这样的历史之后确定他的行动,即若他执行他的计划,则这段历史不可能发生。如我们以前所见,在图 104.1 的博弈中,参与人 1 的战略既要确定在博弈开始又要确定在历史(A,C)之后她所采取的行动,即使在博弈开始时她所采取的行动是 B。

对若战略被实行则不可能发生的历史相对应的某个参与人战略的组成部分,可作如下解释:它们是别的参与人关于那个参与人在他不遵从他计划的事件中将要做什么的信念。例如,在图 104.1 的博弈中,参与人 1 在历史(A,C)之后的行动,可被认为是参与人 2 关于参与人 1 在该历史之后将作的选择的信念,参与人 2 需要拥有这个信念去理性地选择一个行动。如果参与人 1 计划去选择 A,那么参与人 2 的信念就与参与人 1 计划好的在历史(A,C)之后的行动相一致。不过如果参与人 1 计划选择 B,那么这样一个信念不可能派生于参与人 1 的行动计划。在此情形下,参与人 1 的战略仍然提供这样一个信念。注意:参与人 2 关于参与人 1 的信念即使参与人 1 计划去选择 B,也是与博弈的分析相关的,因为为了理性化 B 的选择参与人 1 需要形成一个关于参与人 2 在历史 A 之后的计划的信念。 104

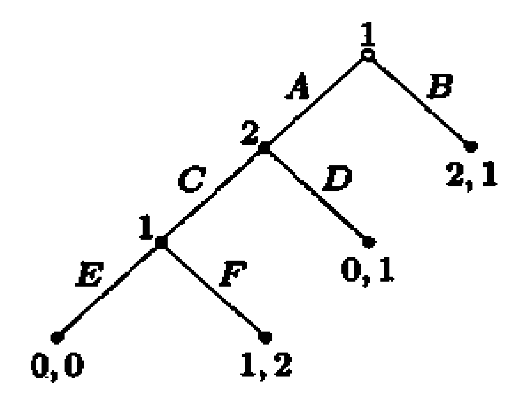


图 104.1 一个扩展博弈，在其中参与人 1 既在参与人 2 之前又在参与人 2 之后行动

这个解释有很多内涵。第一，谈论"战略的选择"变得有疑问了，因为一个参与人不会选择别的参与人的信念。第二，在任何一个具有两个以上参与人的博弈的均衡中有一隐含假设：除了任一给定的参与人 i 之外的所有参与人拥有同一个关于参与人 i 的行动的信念，这不存在于他遵从其行动计划的情形，而存在于在他偏离此计划的情形下。第三，如果有人想对战略施加限制条件，那他就得小心，因为他那时所做的假设不仅与参与人的行动有关，也与这些行动计划被违背时他们考虑每个其他人意图的信念有关。

这个对于战略的解释也减少了子博弈精炼均衡概念的吸引力。请再一次考虑图 104.1 中的博弈。在博弈的结构里对于参与人 2 没有办法去理性化参与人 1 对 A 的选择（因为参与人 1 对历史 B 的偏好优于当她选择 A 时所能产生的每段历史）。因此如果她观察到参与人 1 选择 A，参与人 2 必定放弃关于博弈的一个基本假设：她必须相信要么参与人 1 不是理性的，参与人 1 感觉到该博弈不同于图 104.1 的博弈；要么参与人 1 因为"错误"而选择 A（尽管这些错误在博弈的具体规定中是想象不到的）。可是子博弈精炼均衡概念要求不管他观察到什么历史，参与人 2 继续维持他的这些初始假设：参与人 1 是理性的，知道该博弈且不会犯错误。

105 6.5 两个值得注意的有限边界博弈

本节我们通过考察两个著名的博弈来展示子博弈精炼均衡概念的一些优点和弱点。为了便于描述这种博弈，我们引进一个离散的，从 1 期开始的

时间变量，这个变量对扩展博弈的正规模型不是一个附加物；它仅是用来简化博弈的描述和准确描述其结构的一个设计。

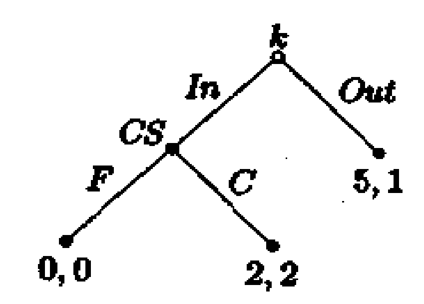


图 105.1　连锁店博弈中在城市 k 参与人选择的结构。每个二元组中的第一个数为连锁店的支付，第二个数为参与人 k 的支付

6.5.1　连锁店博弈

某连锁店（参与人 CS）在 K 个城市中有分店，城市标号为 $1,\cdots,K$。在每个城市 k 有惟一一个潜在竞争者，即参与人 k。在每个时期潜在竞争者中的其中一个决定是否与参与人 CS 竞争；在时期 k 轮着参与人 k 这样做。如果参与人 k 决定去竞争，那么连锁店可以抵制（F）也可合作（C）。连锁店在参与人 $k+1$ 做决定前对参与人 k 的决定作出反应。因此在时期 k 可能的结果集合是 $Q=\{Out,(In,C),(In,F)\}$。若在任一给定城市连锁店遇到挑战，则它宁愿合作而不抵制，不过连锁店在没有竞争者进入的情况下获得最大支付。每个潜在竞争者呆在外面比进入且遭到抵制更好，但是当它进入且连锁店是合作的时候获得最高支付。在单个时期参与人的选择和他们的考虑的结构在图 105.1 中被简化。

再加两个假设便完成了博弈的描述。第一，在博弈的每个时点上所有参与人都知道以前所选择的所有行动。这允许我们将该情形模化为一个完全信息扩展博弈，在其中历史集合是 $(\cup_{k=0}^{K}Q^k)\cup(\cup_{k=0}^{K-1}(Q^k\times\{In\}))$，这里 Q^k 是 Q 的 k 个元素的所有序列的集合；参与人函数给定为：若 $h\in Q^k$ 则 $P(h)=k+1$ 且若 $h\in Q^k\times\{In\}$ 则对 $k=0,\cdots,K-1$ 有 $P(h)=CS$。第二，博弈中连锁店的支付是在 K 个城市它的支付的和。 106

该博弈有很多纳什均衡：每一个任何时点上的结果是 Out 或 (In,C) 的终点历史是一个纳什均衡结果。（在任一参与人 k 选择 Out 的均衡中连锁店的战略确定为：如果参与人 k 进入，它将抵制。）

相反，该博弈有惟一子博弈精炼均衡，在此均衡中每个挑战者选择 In 和连锁店经常选择 C。（在城市 K 不管历史连锁店必须选择 C，所以

在城市 $K-1$ 它必须同样做;继续这个过程人们可明白连锁店必须经常选择 C。

当 K 值较小时,非子博弈精炼的纳什均衡在直观上不太吸引人,而子博弈精炼均衡都是吸引人的。不过,当 K 较大时子博弈精炼均衡就失去吸收力了。在这个均衡中,连锁店的战略决定了不管它以前的行动如何,它都与每个进入者合作。给定我们关于战略的解释(参看前一部分),这就意味着:挑战者仍相信连锁店会与它合作——尽管他已经观察到连锁店会同很多进入者抗争。虽然连锁店的惟一子博弈精炼均衡战略确定了它会与每个进入者合作,但是对一个已经观察到连锁店重复抗争的竞争者来说,认为它的进入将会遇到一个侵略性的反应似乎更合理,特别是如果有很多城市有待竞争。如果一个挑战者进入,那么选择合作是连锁店眼前的利益,但直觉意味着为了阻止将来的进入,对侵略性行动建立一个威信是连锁店的长远利益。在第 12.3.2 节我们研究一种试图抓住该思想的连锁店不确化博弈,在那里挑战者不完全知道连锁店的动机。

6.5.2 蜈蚣博弈

两个参与人卷入了一个他们轮流有机会去终止的过程中。每个人对当他在任何时期 t 去终止该过程的结果的偏好优于当另一个参与人在 $t+1$ 期时这样做。不过,较好的仍然是过程在任一时期都不被终止所能产生的任一结果。在 T 时之后(这里 T 是偶数)过程结束。对 $T=6$ 的情形由图 107.1 所示。(名字"蜈蚣"来自于图表的形状。)

107

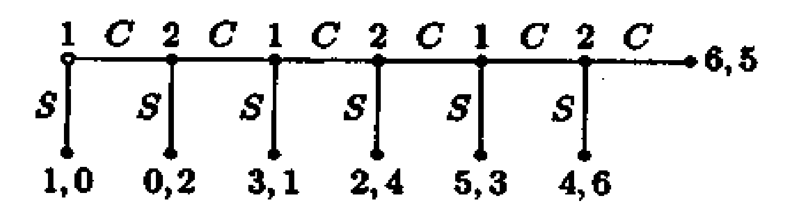


图 107.1 6 个时期的蜈蚣博弈

正式地,博弈中的历史集合包括所有长度为 $t(0\leqslant t\leqslant T)$ 的序列 $C(t)=(C,\cdots,C)$ 和所有包含由一个 S 跟随的 $t-1(1\leqslant t\leqslant T)$ 个重复的 C 的序列 $S(t)=(C,\cdots,C,S)$。参与人函数定义为:若 t 为偶数且 $t\leqslant T-2$,则 $P(C(t))=1$;若 t 为奇数,则 $P(C(t))=2$。对 $t\leqslant T-3$ 参与人 $P(C(t))$ 的偏好顺序是:$S(t+3)$ 优于 $S(t+1)$,$S(t)$ 优于 $S(t+2)$,参与人 1 的偏

好顺序是：$C(T)$优于$S(T-1)$，$S(T-1)$优于$S(T)$，参与人2的偏好顺序是：$S(T)$优于$C(T)$。

该博弈有惟一子博弈精炼均衡，在此均衡里每个参与人在每一时期都选择S。这个均衡的结果同每个纳什均衡的结果一样。为说明之，首先注意不存在结果为$C(T)$的均衡。现在假定有一以参与人i在t期选择S而结束的纳什均衡(即在历史$C(t-1)$之后)。如果$t \geqslant 2$，那么参与人1可通过在$t-1$期选择S来增加他的支付。因此在任一均衡中，参与人1在第1期选择S。为使这对参与人1最优，参与人2必须在2期选择S。纳什均衡的概念对参与人在较后时期的选择未加任何约束：参与人1在1期选择S和参与人2在2期选择S的任一战略二元组都是一个纳什均衡。(不过要注意该博弈的简化形式有惟一纳什均衡。)

在这个博弈的惟一子博弈精炼均衡中，每个参与人都相信另一个参与人将在下一个机会终止博弈，哪怕在一段参与人过去已选择了多次继续的历史之后。如同在连锁店博弈的精炼均衡中一样，这样一种信念在直观上不太吸引人；除非T很小，否则参与人1在博弈的开始立即选择S是不太可能的。蜈蚣博弈中的直觉与连锁店博弈中的直觉在任一长的历史之后，两个参与人都重复违背了深嵌于子博弈精炼均衡概念之中的理性规程。在一段参与人和他的对手过去已选择了多次的历史之后，参与人形成关于他的对手在下期的行动的信念所依赖的基础就更不清楚了。 108

?练习108.1 对任一$\epsilon>0$，定义战略博弈的一个ϵ—均衡为一个行动组合，它满足这样的性质，即任何参与人都没有另一个可选择的行动，使他增加的支付超过ϵ。试证明对任一正整数k和任一$\epsilon>0$，有一边界T足够长使得修正为所有支付被T除的蜈蚣博弈战略形式有一个ϵ—均衡，在其中第一个终止博弈的参与人在时期k这样做。

6.6 反复剔除弱劣战略

6.6.1 与子博弈精炼均衡的关系

在第4.3节我们明确了一个战略博弈的反复剔除弱劣行动的过程，并

且论证了它比反复剔除强劣行动的过程缺少吸引力(尽管一个弱劣行动是对某一信念的最优反应),对于参与人来说它仍是用来简化博弈的自然方法。在 Kuhn 定理(命题 99.2)的证明中,我们明确了有限完全信息扩展博弈的逆向归纳过程,并且说明了它产生博弈的子博弈精炼均衡集合。

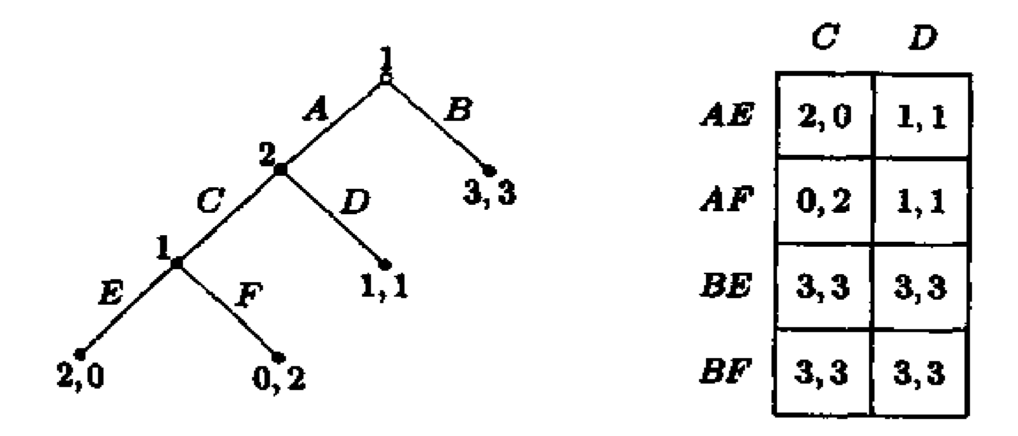
这两个过程是相关的。令 Γ 为一有限完全信息扩展博弈,在其中没有参与人对任何两个终点历史是无差别的。那么 Γ 有惟一的子博弈精炼均衡,现在定义一个在 Γ 的战略形式 G 中剔除弱劣行动的序列(Γ 中弱劣战略)满足:在过程结束时仍保留的所有 G 的行动组合产生 Γ 的惟一子博弈精炼均衡结果。

令 h 为一满足 $P(h)=i$ 和 $l(\Gamma(h))=1$ 的 Γ 的一段历史且令 $a_i^* \in A(h)$ 为对历史 h 由逆向归纳过程所选择的惟一行动。逆向归纳剔除了参与人 i 的在历史 h 之后选择不同于 a_i^* 的每个战略。一个不同于 a_i^* 的行动的参与人 i 的每个战略。在所有这些战略中,这些与 h 相一致的(即这些只要 h' 是 h 的一段子历史($P(h')=i$ 就选择紧随 h' 的 h 的组成部分的)行动是 G 中的弱劣行动。在我们所定义的剔除序列中,所有这些弱劣行动在此阶段都从 G 中被剔除了。对每段满足 $l(\Gamma(h))=1$ 的历史 h 完成这种剔除后,我们转向满足 $l(\Gamma(h))=2$ 的历史 h 并且完成一个类似的剔除,用此方法我们一直回到博弈的开始。在此过程结束时仍保留的参与人 i 的每个战略选择由逆向归纳法在任何与参与人 i 的子博弈精炼均衡战略相一致的历史之后所选择的行动。因此特别地子博弈精炼均衡保留且每一个保留的战略组合产生惟一的子博弈精炼均衡结果。

109

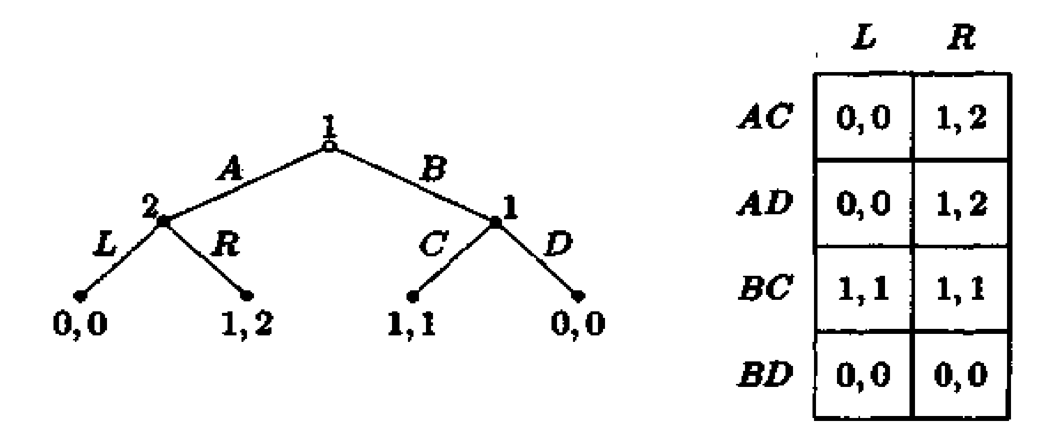
不过要注意别的剔除次序可能会去掉所有子博弈精炼均衡。例如在图 109.1 博弈中,惟一的子博弈精炼均衡是(BE, D),但如果在战略形式中弱劣行动 AE 被剔除则 D 在保留的博弈中是弱劣的;如果 AF 在 D 后被剔除,那么剩下的两个行动组合(BE, C)和(BF, C)都不是扩展博弈的子博弈精炼均衡。

也要注意若某一个参与人对两段终点历史是无差别的,那么可能(ⅰ)有一个剔除子博弈精炼均衡结果的剔除次序和(ⅱ)没有剔除次序使得所有剩下的战略组合产生子博弈精炼均衡结果,图 110.1 的博弈表明(ⅰ):参与人 1 的战略 AC, AD 和 BD 对 BC 是弱劣的,在它们都被剔除后剩下的行动二元组都不能产生子博弈精炼均衡结果(A, R)。若支付(1,2)由(2,0)所替代,那么调整后的博弈表明(ⅱ):结果(A, L)甚至不是一个纳什均衡结果,但对任一剔除顺序都能保留。



	C	D
AE	2,0	1,1
AF	0,2	1,1
BE	3,3	3,3
BF	3,3	3,3

图 109.1 扩展博弈(左)和它的战略形式(右)。存在一个剔除战略形式中弱劣行动的次序,它剔除扩展博弈的惟一子博弈精炼均衡



	L	R
AC	0,0	1,2
AD	0,0	1,2
BC	1,1	1,1
BD	0,0	0,0

图 110.1 一个扩展博弈(左)和它的战略形式(右)。存在一个剔除战略形式中弱劣行动的剔除次序,它剔除扩展博弈的一个子博弈精炼均衡结果

6.6.2 顺向归纳法

110

我们现在提供两个例子,它们表明反复剔除弱劣行动战略抓住了一些在扩展博弈中参与人推理的有趣特征。

◇例 110.1 (具有外部选择的 *BoS*)(*BoS with an outside option*)

考虑图 111.1 所示的完全信息和同时行动扩展博弈。在该博弈中参与人 1 先决定是呆在家里看书还是去听音乐会。若她决定看书则博弈结束;若她决定去听音乐会,则她与参与人 2 进行 BoS 博弈(例 15.3)。(在历史

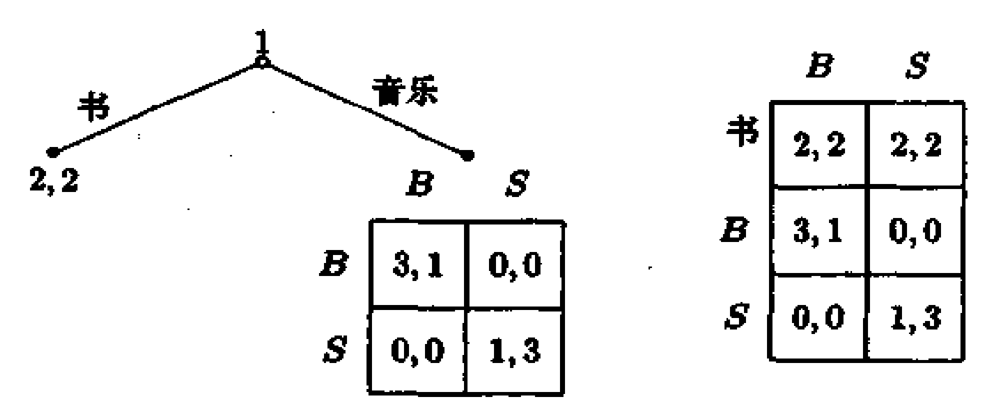


图 111.1 具有外部选择的 BoS(左边:完全信息和同时行动扩展博弈)和它的简化战略形式(右)

音乐会之后参与人同时选择行动)每个参与人偏好有人陪他去听他喜欢的作曲家的音乐会。

在这个博弈的简化战略形式中,对于参与人 1 来说 S 严格劣于书;若它被剔除则对参与人 2 来说 S 对 B 弱劣,最后,对参与人 1 来说书对 B 是严格劣的。剩下的结果是(B,B)。

这个剔除序列与下列关于扩展博弈的论证相一致。如果参与人 2 不得不做一个决策,则他知道参与人 1 没有选择书。对参与人 1 来说只有她计划选 B,这个选择才有意义。因此参与人 2 应该也选 B。这一论证的逻辑在经典文献中被称为"顺向归纳"(forward induction)。

111

在下一个例子中反复剔除弱劣战略导致了一个更引人注目的结论。

例 111.1(焚钱)(Burning money)考虑在图 112.1 上部的博弈。两个人打算用图左边表格所示的货币支付来进行 BoS 博弈。在这样做之前,参与人 1 可放弃一美元(采取行动 D)或避免这样做(采取行动 0);她的行动被参与人 2 观察到。两个参与人都是风险中立者。(注意:参与人初始行动之后的两个子博弈在战略上都是同一的。)

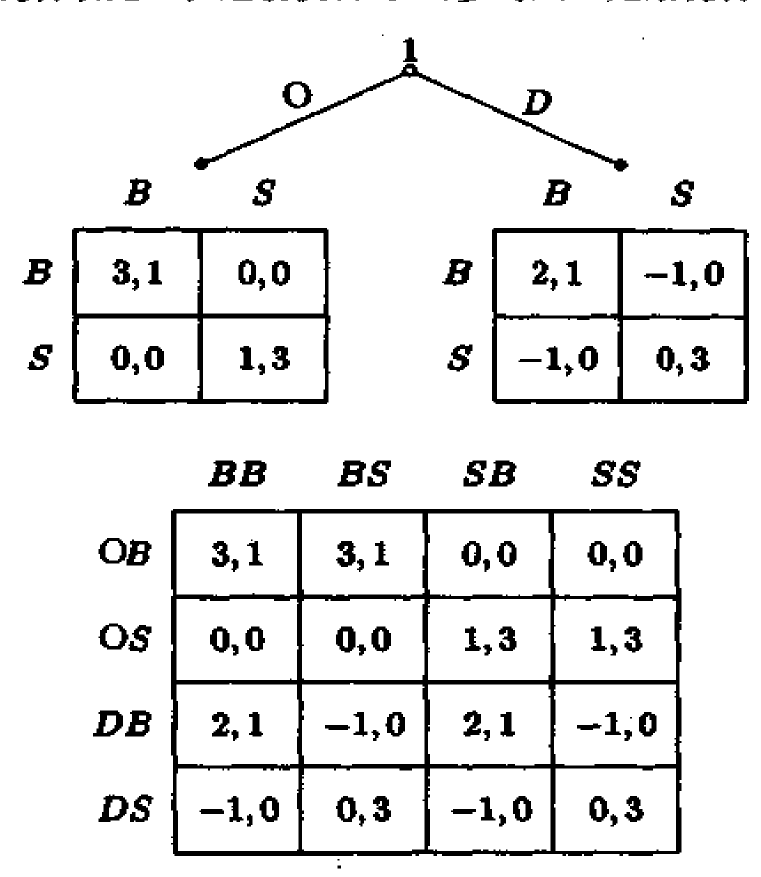
博弈的简化战略形式由图 112.1 的下部所示。弱劣行动如下可被反复剔除:

1. 对于参与人 1 来说 DS 对 OB 弱劣
2. 对于参与人 2 来说 SS 对 SB 弱劣
3. 对于参与人 2 来说 BS 对 BB 弱劣
4. 对于参与人 1 来说 OS 对 DB 强劣
5. 对于参与人 2 来说 SB 对 BB 弱劣
6. 对于参与人 1 来说 DB 对 OB 强劣

剩下的惟一战略二元组为(OB,BB):参与人 1 能放弃一美元的事实包含了

在反复剔除弱劣行动下,结果是参与人 1 所偏好的。

一个符合这个剔除序列的直观论证如下。参与人 1 必须预测到如果她 112 选择 O,那么她将获得一个至少为 3/4 的期望支付,因为对每个关于参与人 2 行动的信念她有一至少使她获得这个期望支付的行动。因此如果参与人 2 观察到参与人 1 选了 D,则他必定期望参与人 1 将随后选择 B(因为选择 S 不可能使参与人 1 获得超过 3/4 的支付)。给定这点,如果参与人 1 选 D 则参与人 2 应该选 B;参与人 1 知道这点,所以若她选 D 则她希望获得 2 的支付。但现在参与人 2 仅能通过相信参与人 1 会选 B 来理性化由参与人 1 所选择的 O(因为 S 只能给参与人 1 不多于 1 的支付),所以在观察到 O 之后,参与人 2 的最优行动是 B。这就使得 O 对参与人 1 是最优行动。



	B	S
B	3,1	0,0
S	0,0	1,3

	B	S
B	2,1	−1,0
S	−1,0	0,3

	BB	BS	SB	SS
OB	3,1	3,1	0,0	0,0
OS	0,0	0,0	1,3	1,3
DB	2,1	−1,0	2,1	−1,0
DS	−1,0	0,3	−1,0	0,3

图 112.1　一个完全信息和同时行动的扩展博弈,其中参与人 1 在进行博弈 BoS 前可选择毁掉一美元。扩展博弈在上部分给出,简化战略形式在下部分

为了阐明在第 1.5 节中我们所作的"稳定状态"与"推断"这两个博弈理 113 论方法间的区别,现在我们讨论这两个例子。从稳定状态解释的观点看两个例子有同样的证明:在结果为方 (例 110.1)或$(O,(S,S))$(例 111.1)的均衡中参与人 2 的信念在下列意义下都是不合理的:若参与人 1 偏离(到音

乐或 D),那么参与人 2 能得到的惟一合理的结论是参与人 1 打算随后采取 B,其意味着参与人 2 应该选 B 使得偏离对参与人 1 有利。从推断解释的观点看两个博弈有差别,至少在例 2 中证明更复杂这点上如此。在第 1 例中参与人不得不研究参与人 2 将如何解释她采取的行动(Concert)。在第 2 例中参与人 1 关于参与人 2 对她行动 0 的意图的解释推理,涉及到她的关于参与人 2 将如何理性化她没采用的行动(D)的信念。

第 2 个例子提出了一个这样的问题,即如何具体化一个给定情形下的博弈。我们已进行的证明很明显建立在这样假设的基础上,即图 112.1 的博弈将情形反应为与参与人理解的一样。特别地,它们假设参与人理解处理一美元的可能性是与 BoS 的进行相关的。我们认为这是一个不令人信服的假设:任何有理性的人不会考虑处理一美元的可能性与参加哪场音乐会的选择相关。因此我们认为模化该情形的博弈应该简单排除处理的合理性。[AR 认为即使(包括了参与人 1 可能焚钱的行动在内的)博弈被一裁判员清楚地提供给全部参与人也应该如此,因为在一个参与人战略地分析情形前,他会"编辑"情形的描述并剔除"不相关"因素。]我们将"处理一美元的可能性是不相关的"这一断言建立在什么原则基础上呢?答案是不很清楚的;一些思想如下:(a)处理不影响 BoS 中参与人的支付。(b)如果处理对于参与人 1 的理性有教益的话,那么一个合理的结论应该是毁坏一美元的参与人不过是不理性的。(相反,例如花钱在广告上可能预示着有用的信息。)(c)博弈的两部分间的不相似使得参与人 2 不太可能在第一阶段试图从参与人 1 的行动来推断第二阶段她将如何行动。

对本部分证明的一个解释是,每个参与人通过能解释他将来意图的信息来完成他的行动。因此为了进一步考察证明,通过增加具有这种明显意图的行动来扩张博弈似乎是自然的。不过,如下例所示,如果这样做,我们将面临困难。

114 假定 BoS 将被迫行动且参与人 1 在 BoS 开始前能发出一个信息(任一信号串)给参与人 2。再假定每个参与人只关心 BoS 的结果,而不关心任何被发送信息的内容或他所采取的行动与信息间的相互关系。这个扩展博弈有子博弈精炼均衡结果,其中(B,B)和(S,S)都在 BoS 中被采用;特别地,有一个参与人 2 完全忽略参与人 1 的信息的均衡。之所以这样是因为没有强迫参与人 2 去将由参与人 1 发送的信息解释为有意思的,即使信息是"我要采取 B"。信息可被发送的事实并不影响结果,因为行动的名称在纳什均衡概念中不起任何作用。一个合理的结论似乎是,如果我们希望对参与人间的交流建模,那么对扩展博弈模型的调整是必须的。

⑦练习 114.1 考察图 112.1 上部博弈的一个变形，在其中参与人 1 先有放弃一美元的选择，然后参与人 2 在观察到参与人 1 的行动后也被允许放弃一美元，最后参与人 1 和 2 进行 BoS。试找出反复剔除弱劣行动后剩下的结果集合并将其与在图 112.1 的博弈中这样做所得的结果相比较。

⑦练习 114.2 考虑一个博弈，它与图 112.1 上部的博弈不同之处仅仅在于在参与人 1 作了放弃一美元的行动后由参与人进行的博弈如图 114.1 所示。试找出反复剔除弱劣行动后剩下的结果集合。

	A	*B*
A	2,2	0,0
B	0,0	1,1

图 114.1 与练习 114.2 相关的博弈

[注解]

扩展博弈的概念首创于 von Neumann and Morgenstern(1944)；Kuhn(1953)提供了我们描述的系统表达。子博弈精炼均衡的概念应归功于 Selten(1965)。

一次偏离性质(引理 98.2)与动态规划的一个原理紧密相关。命题 99.2 115 应归功于 Kuhn(1953)。同时将行动博弈视为完全信息博弈的思想应归功于 Dubey and Kaneko(1984)。我们关于第 6.4节中战略解释的一些讨论以 Rubinstein(1991)为基础。在第6.5.1节研究的蜈蚣博弈应归功于 Rosenthal (1981)。由这些博弈所引起的一些问题由 Reny(1993)研究。[参看第12.3.2节对连锁店博弈的一具体变形应归功于 Kreps and Wilson(1982a)和 Milgrom and Roberts(1982)]。Moulin(1986)给出了有关反复剔除弱劣行动的过程和子博弈精炼均衡解的结论。图109.1中的博弈(经调整)摘于 Reny (1992)。顺向归纳的思想(与例110.1中的博弈一起)应归功于 Kohlberg；它在 Kohlberg and Mertens(1986)中被讨论。例111.1中的博弈应归功于 van Damme(1989)，也可参看 Ben-Porath and Dekel(1992)和 Osborne(1990)。(关于在此博弈中所引起的问题的更多讨论参看 Rubinstein(1991))

练习 103.2 基于 Kreps 的一个思想；练习 108.1 应归功于 Radner (1980)(也可参看 Radner(1986))。

117 # 第 7 章

讨价还价博弈

人们经常要在一种对最优结果缺乏完全一致看法的情形下集体选择一个结果。这里我们研究一个反应了这种情形并基于完全信息扩展博弈的模型。

7.1 讨价还价和博弈论

博弈论可用来处理人们的利益相冲突的情形。相关的人可能试图通过自愿地采取一个对他们中的所有人都有利的行动进程来解决这种冲突。如果对所有的人来说有不止一个比分歧更值得采纳的行动进程，且对追求哪个行动进程又有冲突，那么某种关于如何解决冲突的协议就是必要的。协议过程可以通过使用博弈论的工具来建模；本章中的模型是这种分析的一个例子。

因为利益冲突的存在是博弈论情形的中心环节，讨价还价理论就不仅仅是博弈论的一个应用；讨价还价模型自它诞生以来就处于该主题的中心且已引起了广泛注意。大部分早期工作都是使用由 John Nash 创导的公理方法，他的工作在第 15 章我们要讨论。本章中我们应用完全信息扩展博弈模型来研究讨价还价的一些特征，特别是参与人的不耐心和风险厌恶对结果的影响。

118 ## 7.2 轮流出价讨价还价模型

考虑这样一种情形，即两个讨价还价的人都有机会就集合 X 中的一个

结果达成协议并且都领会如果他们达不成协议则结果将会是某一固定事件 D。例如，集合 X 可以是一块想要的蛋糕的可行分法集合，D 可以是两人都得不到蛋糕的事件。为了将这一情形模化为一个扩展博弈，我们得确定在谈判中参与人应遵循的过程。

我们研究的过程是一种参与人轮流出价的过程。通过引进值为非负整数的"时间"变量，我们能便利地对它进行描述。博弈的第一个行动发生在时期0，这时参与人1出价（X 的一个元素），参与人2要么接受要么拒绝。接受则终止博弈而拒绝则导致时期1，此时参与人2出价，参与人1要么必须接受或拒绝。再次，接受则终止博弈，拒绝则导致时期2，此时再一次轮到参与人1出价。博弈按这种方法继续：只要没有出价被接受，在每个偶数时期参与人1出价而参与人2必须接受或拒绝；在每个奇数时期参与人2出价而参与人1必须接受或拒绝。对谈判轮数没有限制：博弈有一个无限边界。（关于在将一种情形模化为博弈时在有限与无限边界间选择的讨论参看第8.2节）某个出价被拒绝的事实对后来可能的出价无任何限制。特别地，一个拒绝出价 x 的参与人可能在其后提出一个对他来说比 x 更糟的出价。如果没有任何出价被接受则结果是分歧事件 D。

我们现在给一个关于该情形作为完全信息扩展博弈（见定义89.1）的正式描述。参与人集合是 $N=\{1,2\}$。令可能协议集合 X 为欧氏空间的一个紧的且连通的子集。令 T 为非负整数集合。历史集合 H 是所有为下列类型之一的序列的集合，这里 $t\in T$，对所有 s 有 $x^s\in X$，A 意即"接受"，R 意即"拒绝"。

Ⅰ．ϕ（初始历史），或 $(x^0,R,x^1,R,\cdots,x^t,R)$

Ⅱ．$(x^0,R,x^1,R,\cdots,x^t)$

Ⅲ．$(x^0,R,x^1,R,\cdots,x^t,A)$

Ⅳ．$(x^0,R,x^1,R,\cdots)$

从这个关于历史的描述可知：轮到行动的参与人在一段类型Ⅰ的历史之后选择 X 的一个元素，且在一段类型Ⅱ的历史之后选择 $\{A,R\}$ 中的一个元素。类型Ⅲ和Ⅳ的历史是终点；类型Ⅲ的那些为有限的，而类型Ⅳ的那些为无限的。参与人函数被确定如下：如果 h 属于类型Ⅰ或类型Ⅱ且 t 是奇数，或 h 为空，则 $P(h)=1$；如果 h 属于类型Ⅰ或类型Ⅱ且 t 是偶数，则 $P(h)=2$。

119

为了完成对博弈的描述我们需要确定参与人在终点历史上的偏好。我们假定每个参与人仅关心协议是否达成以及协议的时间和内容，而不关心在达成协议前出价的路径。精确地说，终点历史集合被分割如下：对每个 x

$\in X$ 和 $t\in T$ 所有满足 $x^t=x$ 的类型Ⅲ的历史集合是分割的一个元素，用 (x,t) 表示；所有类型Ⅳ的历史集合是分割的一个元素，用 D 表示。对每个参与人 i 在历史上的偏好关系来自于这个分割的一些元素组成的集合 $(X\times T)\cup\{D\}$ 上的一个偏好关系 $\succsim_i$（那就是，每个参与人 i 对存在于分割的同一元素中的两段历史是无差别的）。我们假定每个参与人 i 的偏好关系 $\succsim_i$ 满足下列条件：

- 任何协议都比未达成协议好：对所有 $(x,t)\in X\times T$，有 $(x,t)\succsim_i D$。
- 时间是有价值的：对每个时期 $t\in T$ 和每个协议 $x\in X$，有 $(x,t)\succsim_i(x,t+1)$，若 $(x,0)\succ_i D$ 则有严格偏好。
- 偏好是平稳的：$(x,t)\succsim_i(y,t+1)$ 当且仅当 $(x,0)\succsim_i(y,1)$，$(x,t)\succsim_i(y,t)$ 当且仅当 $(x,0)\succsim_i(y,0)$。
- 偏好是连续的：若对所有 n 有 $x_n\in X$ 和 $y_n\in X$，$\{x_n\}$ 收敛于 $x\in X$，$\{y_n\}$ 收敛于 $y\in X$，且对所有 n 有 $(x_n,t)\succsim_i(y_n,s)$ 那么 $(x,t)\succsim_i(y,s)$。

这些假设蕴含了对任何一个 $\delta\in(0,1)$ 有一连续函数 $u_i:X\to\mathbb{R}$ 使得在下列意义下偏好关系 $\succsim_i$ 在 $X\times T$ 上由函数 $\delta^t u_i(x)$ 代表：$(x,t)\succsim_i(y,s)$ 当且仅当 $\delta^t u_i(x)\geqslant\delta^s u_i(y)$。[这来自于 Fishburn 和 Rubinstein，(1982，定理1和2)]注意若 $\delta^t u_i(x)$ 代表了 $\succsim_i$，那么对任一 $\epsilon\in(0,1)$ 函数 $\epsilon^t v_i(x)$ 也代表了 $\succsim_i$，这里 v_i 由 $v_i(x)=(u_i(x))^{(\ln\epsilon)/(\ln\delta)}$ 确定。因此如果 $\delta^t u_i(x)$ 和 $\epsilon^t v_i(x)$ 是两个偏好关系的表示且 $\delta>\epsilon$，那么除非 $v_i=u_i$ 否则我们不能得出第一个偏好关系比第二个更"有耐心的"结论。

120 我们称这样确定的完全扩展博弈 $\langle N,H,P,(\succsim_i)\rangle$ 为**轮流出价讨价还价博弈**（bargaining game of alternating offers）$\langle X,(\succsim_i)\rangle$。

这种博弈的前两期在图120.1中被表示出来。（注意 x^0 仅是在博弈开始时对参与人1有效的出价中的一个，x^1 仅是在他拒绝 x^0 后对参与人2有效的多个出价中的一个。）

下列是一个重要的轮流出价讨价还价的例子。

◇例120.1（分蛋糕）（Split-the-pie）可能的协议集合 X 是一块想要的蛋糕的所有分法的集合：

$$X=\{(x_1,x_2):x_i\geqslant 0,\quad i=1,2\text{ 且 }x_1+x_2=1\}.$$

每个参与人 i 在 $(X\times T)\cup\{D\}$ 上的偏好关系 $\succsim_i$ 有下列性质：$(x,t)\succsim_i(y,t)$ 当且仅当 $x_i\geqslant y_i$（蛋糕是想要的）；同时 $D\sim_1((0,1),0)$，且 $D\sim$

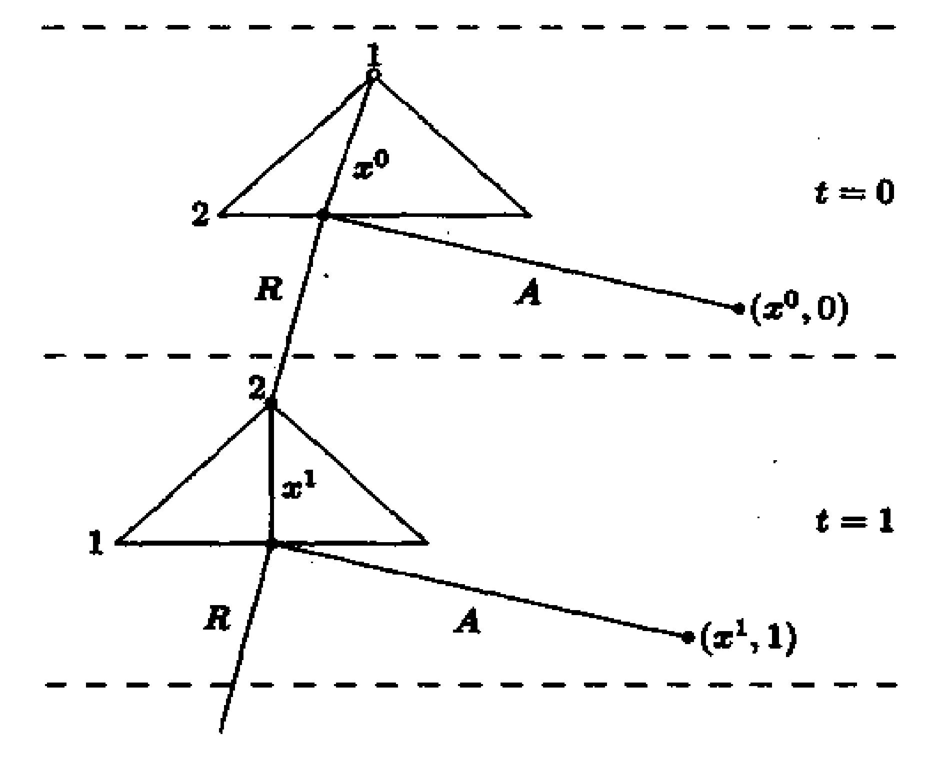


图 120.1 轮流出价讨价还价博弈前两期的表示

$_2((1,0),0)$(在达不成协议的事件中两个参与人一无所获)。因此 $\succsim_i$ 在 $X\times T$ 上可由形如 $\delta_i^t w_i(x_i)$ 的一个函数表示，其中 $0<\delta_i<1$ 且 w_i 是递增的和连续的且 $w_i(0)=0$。

轮流出价讨价还价博弈的纳什均衡集合是很大的。特别地，对任一 $x^*\in X$ 存在一个纳什均衡，在其中参与人立即就 x^* 达成协定(即参与人1的均衡战略赋 x^* 给初始历史，参与人2的战略赋 A 给历史 x^*)。一个这种均衡是，在其中两个参与人经常接受一个出价 x 当且仅当 $x=x^*$。(换言之，每个参与人 i 能在时期 t 接受一出价 x 当且仅当 $(x,t)\succsim_i(x^*,t)$。)还有，对于参与人偏好的很多具体规定都有协议不能立即达成的纳什均衡。例如，在分蛋糕中对任一协议 x 和时期 t 都有一个纳什均衡，对于它结果是在时期 t 接受 x。一个这种均衡是，在其中直到 $t-1$ 期每个参与人都要求得整块蛋糕且拒绝所有出价，并从时期 t 起出价 x 且仅接受 x。 121

这些纳什均衡阐明了我们在第6.1.3节结束时所形成的观点：纳什均衡概念不排除"不可信的威胁"的使用。考虑分蛋糕博弈的纳什均衡，在其中两个参与人经常出价 x^* 且参与人 i 在时期 t 接受一个出价 x 当且仅当 $(x,t)\succsim_i(x^*,t)$。如果 $(x^*,0)\succ_2(x^*,1)$ 则由参与人偏好的连续性有一协议 x，在其中 x_2 略少于 x_2^*，且满足 $(x,0)\succ_1(x^*,0)$ 和 $(x,0)\succ_2(x^*,$

1)。在均衡中参与人 2 的战略决定了在任何时期他拒绝这样一个出价 x：这个"威胁"导致参与人 1 去出价 x^*。给定参与人 1 的战略则参与人 2 的威胁是不可信的：如果参与人 2 实行他的威胁去拒绝 x，则可能发生的最优结果是在下一时期有一个关于 x^* 的协议，这比起参与人 2 在时期 0 通过接受 x 而得到的关于 x 的协议来，是参与人 2 较不喜欢的结果。正如我们在以前章节中所解释的那样，子博弈精炼均衡概念被设计用来分离没有参与人的战略有这种不吸引人的性质的均衡。

7.3 子博弈精炼均衡

7.3.1 特性

我们现在要说明，在某些附加的假设条件下，一个轮流出价讨价还价博弈有一个在本质上是惟一的子博弈精炼均衡，我们将描述它的特征。第一个假设被设计用来避免冗余。

122

A1 设有两个协议 x 和 y 对 $i=1,2$ 使 $(x,0)\sim_i(y,0)$ 成立。

下一个假设简化了分析。

A2 对于 $i=1,2,j\neq i,(b^i,1)\sim_j(b^i,0)\sim_j D$，这里 b^i 是对参与人 i 最优的协议。

为了叙述以下两个假设我们定义协议集合 X 的**帕累托边界**(Pareto frontier)为满足对 $i=1,2$ 没有协议 y 使得 $(y,0)\succ_i(x,0)$ 的协议 x 的集合。我们称帕累托边界的一个元素为一有效的协议。

A3 X 的帕累托边界是严格单调的：如果一个协议 x 是有效的则不存在另一个协议 y 使得对两个参与人 i 都有 $(y,0)\succsim_i(x,0)$。

A4 存在惟一的协议二元组 (x^*,y^*) 满足：$(x^*,1)\sim_1(y^*,0)$，$(y^*,1)\sim_2(x^*,0)$，且 x^* 和 y^* 都是有效的。

这些假设中最重要的是 A4。在分蛋糕博弈中一个它可被满足的充分条件是：每个参与人的偏好关系显示"延迟增加损失"：$x_i-f_i(x)$ 对每个参与人 i 是 x_i 的一个增函数，$f(x)$ 是满足 $(f(x),0)\sim_i(x,1)$ 的协议。假设 A4 可被满足的另一个情形是在其中协议集合 X 的帕累托边界函数是集合 $\{x\in\mathbb{R}^2, x_2=g(x_1)\}$，其中 g 为某个递减凹函数且每个参与人 i 的偏好关系由函数 $\delta_i^t x_i\ (0<\delta_i<1)$ 表示。

■命题122.1 满足A1至A4的轮流出价讨价还价博弈$\langle X,(\succsim_i)\rangle$有一个子博弈精炼均衡。令$(x^*,y^*)$为惟一有效协议二元组满足

$$(x^*,1)\sim_1(y^*,0)\text{和}(y^*,1)\sim_2(x^*,0). \quad (122.2)$$

在每个子博弈精炼均衡中,参与人经常出价x^*,接受y和任一个满足$(x,0)\succ_1(y^*,0)$的出价x以及拒绝任一个满足$(x,0)\prec_1(y^*,0)$的出价x;参与人2经常出价y^*,接受x^*和任一个满足$(x,0)\succ_2(x^*,0)$的出价x以及拒绝任一个满足$(x,0)\prec_2(x^*,0)$的出价x。

证明:首先我们要证明在命题中定义的战略二元组是一个子博弈精炼均衡。为了这样做我们要应用该博弈有"一次偏离性质"这一事实:战略二元组是一子博弈精炼均衡,当且仅当对每段历史h轮到行动的参与人不可能仅在历史h之后通过改变他的行动来有利地偏离。如引理98.2所示,每个有限边界的博弈具备这一性质的证明留作练习。

123

?练习123.1 试证明每个轮流出价讨价还价博弈都满足一次偏离性质。

我们现在仅需要检查在任一可能的非终点历史之后每个参与人行动的最优性。最优性的状况是一段类型II的历史。假设在时期t轮着参与人2去对出价x^t作反应,如果他接受这个出价则结果为(x^t,t);如果他拒绝则结果是$(y^*,t+1)$。因为他的偏好是平稳的,从(122.2)可知$(x^t,t)\succsim_2(y^*,t+1)$,当且仅当$(x^t,0)\succsim_2(x^*,0)$。因此他的接受规则是最优的。

现在我们转向证明较困难的部分:要证明子博弈精炼均衡在本质上是惟一的。(惟一的不确定性在于每个参与人对这样出价的反应,即他认为不同于别的参与人的均衡出价且别的参与人认为更坏;注意没有这样的出价是有效的。)

给定参与人偏好的平稳性,对$i=1,2$所有以参与人i的出价开始的子博弈都是同一的。令G_i为这样的一个子博弈(G_1是博弈本身)。这样$\delta\in(0,1)$且对$i=1,2$,令$u_i:X\to\mathbb{R}$使得$\delta^t u_i(x)$代表了$X\times T$上的$\succsim_i$。令$M_i(G_i)$为G_i中参与人i的子博弈精炼均衡支付集合的上确界(SPE):

$$M_i(G_i)=\sup\{\delta^t u_i(x):\text{存在结果为}(x,t)\text{的 }G_i\text{ 的一个 SPE}\}。$$

令$m_i(G_i)$为相应的下确界。

步骤1 $M_1(G_1)=m_1(G_1)=u_1(x^*)$和$M_2(G_2)=m_2(G_2)=u_2(y^*)$。[那即是,在$G_1$中的每个SPE中参与人1的支付是$u_1(x^*)$,在$G_2$

的每个 SPE 中参与人 2 的支付是 $u_2(y^*)$]。

证明：通过函数 ϕ 来描述在 X 的帕累托边界上的支付二元组：如果 x 是有效的则 $u_2(x)=\phi(u_1(x))$。由 X 的连通性和偏好关系的连续性则 ϕ 的定义域是一个区间且 ϕ 是连续的；由 A3 它是一对一的和递减的。

我们先证明

$$m_2(G_2)\geqslant\phi(\delta M_1(G_1))。\quad (123.2)$$

124 如果参与人 1 在 G_2 的第一期拒绝参与人 2 的一个出价，那么她的支付不多于 $\delta M_1(G_1)$。因此在 G_2 的任一 SPE 中她必须接受任一给她多于 $\delta M_1(G_1)$ 的出价。故在 G_2 的任一 SPE 中参与人 2 的支付不少于 $\phi(\delta M_1(G_1))$。

我们现在证明

$$M_1(G_1)\leqslant\phi^{-1}(\delta m_2(G_2))。\quad (124.1)$$

在 G_1 的任一 SPE 中参与人 2 的支付不少于 $\delta m_2(G_2)$，因为参与人 2 会经常拒绝参与人 1 开始的出价。因此，参与人 1 在 G_1 的任一 SPE 中能获得的支付不超过 $\phi^{-1}(\delta m_2(G_2))$。

最后我们证明 $M_1(G_1)=u_1(x^*)$。因为存在 G_1 的一个 SPE，在其中即刻协议在 x^* 上达成，所以我们有 $M_1(G_1)\geqslant u_1(x^*)$。现在我们要证明我们关于协议集合和(122.2)解的惟一性的假设包含了 $M_1(G_1)\leqslant u_1(x^*)$。

由 A2 我们有 $\delta u_2(b^1)=u_2(b^1)$，所以 $u_2(b^1)=0$；由 A3 和 ϕ 的定义我们有 $\delta\phi(\delta u_1(b^1))>0=u_2(b^1)=\phi(u_1(b^1))$。因为 ϕ 是递减的，我们能得到结论 $u_1(b^1)>\phi^{-1}(\delta\phi(\delta u_1(b^1)))$。现在，由(123.2)和(124.1)我们有 $M_1(G_1)\leqslant\phi^{-1}(\delta\phi(\delta M_1(G_1)))$。因此由 ϕ 的连续性存在 $U_1\in[M_1(G_1),u_1(b^1)]$ 满足 $U_1=\phi^{-1}(\delta\phi(\delta U_1))$。如果 $M_1(G_1)>u_1(x^*)$ 那么 $U_1\neq u_1(x^*)$，所以采用 a^* 和 b^* 作为有效协议(其满足 $u_1(a^*)=U_1$ 和 $u_1(b^*)=\delta u_1(a^*)$)可知 (a^*,b^*) 是(122.2)的一个不同于 (x^*,y^*) 的解。这与 A4 矛盾。因此 $M_1(G_1)\leqslant u_1(x^*)$。

同理我们可证明 $m_1(G_1)=u_1(x^*)$，$M_2(G_2)=u_2(y^*)$，和 $m_2(G_2)=u_2(y^*)$，从而完成该步骤的证明。

步骤 2 在 G_1 的每个 SPE 中参与人 2 会立即接受参与人 1 的初始出价是 x^*。

证明：在 G_1 的每个 SPE 中参与人 1 的支付是 $u_1(x^*)$(由步骤 1)且参

与人2的支付至少是$\delta u_2(y^*)=u_2(x^*)$。因为对参与人出价的拒绝导致了子博弈G_2，在其中参与人2的SPE的支付是$u_2(y^*)$。因此由A1和x^*是有效的这一事实，参与人1的开始出价是x^*，它被参与人2接受。

步骤3 在G_1的每一个SPE中参与人2的战略接受任一满足$(x,0)\succ_2(x^*,0)$的出价x且拒绝任一满足$(x,0)\prec_2(x^*,0)$的出价x。

证明：参与人2的一个拒绝导致了G_2，在其中参与人2的支付是$u_2(y^*)$(由步骤1)。因为$u_2(x^*)=\delta u_2(y^*)$，参与人2必须接受任一满足$(x,0)\succ_2(x^*,0)$的出价x且拒绝任一满足$(x,0)\prec_2(x^*,0)$的出价x。(不限制参与人2对出价$x\neq x^*$且满足$(x,0)\sim_2(x^*,0)$的反应。) 125

最后，将类似于步骤3.4的证明应用于G_2的每个SPE中参与人2的出价和参与人1的接受规则。 □

注意，如果协议集合X的所有元素是有效的(例如在分蛋糕博弈中)那么轮流出价讨价还价博弈有一个惟一的(不仅是在本质上惟一的)子博弈精炼均衡。下面的例子在应用中常被使用。

◇例125.1 考虑每个参与人i的偏好由函数$\delta_i^t x_i$($\delta_i\in(0,1)$)表示的分蛋糕博弈。那么我们有$x^*=(a^*,1-a^*)$和$y^*=(1-b^*,b^*)$。这里a^*和b^*解了二元方程组

$$\begin{cases}1-b^*=\delta_1 a^*\\1-a^*=\delta_2 b^*,\end{cases}$$

所以$a^*=(1-\delta_2)/(1-\delta_1\delta_2)$，$b^*=(1-\delta_1)/(1-\delta_1\delta_2)$。

未被命题122.1所涵盖的一个有趣情形是分蛋糕博弈的一个变形，在其中每个参与人对未达成协议的每个时期招致费用$c_i>0$(且对这些由一个参与人招致的费用总和没有上界)。也就是，如果协议x在时期t达成则参与人i的支付是x_i-c_it。这一情形违背了A2，因为对每个协议x有$(x,0)\succ_i(x,1)$。它同样违背了A4：如果$c_1\neq c_2$，那么没有满足那两个条件的协议二元组，而如果$c_1=c_2$，那么有很多这样的协议二元组。

?练习125.2

a. 试证明如果$c_1<c_2$那么在上一段中所描述的博弈有惟一子博弈精炼均衡，并且该均衡有同命题122.1中的均衡有同样的结构，此时$x^*=(1,0)$且$y^*=(1-c_1,c_1)$。

b. 试证明如果 $c_1=c_2=c<1$，那么该博弈有很多子博弈精炼均衡结果，若 $c<\frac{1}{3}$，则包括协议被延迟的均衡。

7.3.2 均衡的性质

效率(Efficiency)轮流出价讨价还价博弈的结构允许讨价还价永远继续下去，但在假设 A1 到 A4 下，在所有的子博弈中精炼均衡协议在 X 的帕累托边界协议上能立即达成(所以博弈的结果是有效的)。

126

战略的平稳性(Stationarity of Strategies)子博弈精炼均衡的战略是平稳的：对任一段在其之后轮到参与人 i 去提出一个协议方案的历史，他都提出同样的协议方案。并且对任一段在其之后轮到他去对一提议作反应的历史，他使用同一准则去选择他的反应。我们没有限制参与人只使用平稳的战略；可是，这些战略作为结论出现。

先动优势(First Mover Advantage)再次考虑例 125.1。如果 $\delta_1=\delta_2=\delta$，那么参与人 1 能得到的蛋糕的数量是 $a^*=1/(1+\delta)>\frac{1}{2}$。博弈中惟一的不对称是参与人 1 先动；她获得大半蛋糕的事实表明首先出价是有优势的。更一般地先动优势有：利用 A3 和 x^* 及 y^* 是有效的事实，在任一满足 A1 到 A4 的轮流出价讨价还价博弈中我们有 $(x^*,0)\succ_1(y^*,0)$。

不耐心的比较静态分析(Comparative Statics of Impatience)参与人偏好的关键特征是它们显示了不耐心。希望一个参与人越不耐心则他在均衡中越不利似乎是合理的。在例 125.1 的博弈中的确是这样，因为 a^* 和 b^* 的值分别在 δ_1 和 δ_2 中是递增的。对任一满足 A1 至 A4 的轮流出价讨价还价博弈我们将这个结论一般化。

定义 $\succsim_i'$ 至少与 $\succsim_i$ 一样不耐心　如果两者导致在 $X\times\{0\}$ 上的同一次序且只要 $(x,1)\sim_i(y,0)$ 就有 $(x,1)\precsim_i'(y,0)$。

■命题 126.1　令 $\langle X,(\succsim_i)\rangle$ 和 $\langle X,(\succsim_i')\rangle$ 为满足 A1 至 A4 的轮流出价讨价还价博弈，假设 $\succsim_1'$ 至少与 $\succsim_1$ 一样不耐心且 $\succsim_2'=\succsim_2$。令 x^* 为在 $\langle X,(\succsim_i)\rangle$ 的每一个子博弈精炼均衡中达成的协议，同时令 x' 为在 $\langle X,(\succsim_i')\rangle$ 的每一个子博弈精炼均衡中达成的协议。那么：$(x^*,0)\succsim_1(x',0)$。

证明：假设结论不成立(所以特别地有 $x^*\neq x'$)。考虑 $X\times X$ 的子

集S，它包括所有满足x和y是有效的且$(y,1)\sim_2(x,0)$的二元组(x,y)。令y'为满足$(x',y')\in S$的协议。因为$(x',1)\sim_1'(y',0)$(由(122.2))可知$(x',1)\succsim_1(y',0)$，且由A4因而有$(x',1)\succ_1(y',0)$。由A2我们有$(b^1,b^1)\in S$，且由A4和时间是有价值的这一假设我们有$(b^1,1)\prec_1(b^1,0)$。因为X是紧的和连通的，所以存在在某一路径上的一个协议X，该路径在帕累托边界上且连接x'和b^1使得$(\hat{x},\hat{y})\in S$和$(\hat{x},1)\sim_1(\hat{y},0)$。因为$(x',0)\succ_1(x^*,0)$和$(b^1,0)\succsim_1(x',0)$我们有$\hat{x}\neq x^*$，这与A4相矛盾。 □

7.4 变形和扩展

7.4.1 过程的重要性

为了将讨价还价模化为扩展博弈，我们需要对参与人所遇到的决策问题的序列结构作一个明确的描述：我们需要确定一个讨价还价过程。在下面练习中，所考虑的轮流出价讨价还价博弈模型的变形表明了讨价还价过程的结构在决定结果的过程中起着重要作用。

? 练习127.1 假设参与人1提出所有出价(而不是轮流出价)。试证明，在A1至A3下，修改后的博弈有一在本质上是惟一的子博弈精炼均衡，在其中，若不考虑参与人的偏好，则达到的协议是b^1，它对参与人1来说是最优可能协议。

轮流出价讨价还价博弈过程几乎是对称地对待全部参与人。首先行动的参与人比他的对手好这一事实只不过是证明了作为惟一出价者的参与人能享受极端优势。

7.4.2 剔除模型的一个关键特征的变形

轮流出价讨价还价博弈模型的一个关键特征是，一个参与人强迫另一个参与人在现在的一个协议和后来的一个更值得要的协议间作选择的能

力。为了阐明这点，先考虑这样的博弈，在其中每个时期参与人同时出价，在任一给定的时期里仅当出价是相容的协议才达成，参与人都不能强迫别人在现在的一个协议与后来的一个更好的协议间作选择；每个有效协议是一个子博弈精炼均衡结果。

为了进一步阐明这点，考虑协议集合 X 包含了有限个元素的情形，则在其中参与人今天提供的一个略好于反应者明天所期望的协议的能力是有限的。在此情形下子博弈精炼均衡支付的范围依赖于集合 X 的丰富程度。下列练习在一个特别的情形中表明了这点。

? 练习 128.1　考虑分蛋糕博弈的一个变形，在其中蛋糕仅分成一个基本可分单元 $\epsilon>0$ 的整数倍，且每个参与人 i 的偏好由函数 $\delta^t x_i$ 表示。用 $\Gamma(\epsilon)$ 来表示该博弈并用 $\Gamma(0)$ 来表示蛋糕可被完全分割的博弈。

a. 试证明如果 δ 足够靠近 1 则对每个协议 $x\in X$ 都存在一个结果为 $(x,0)$ 的 $\Gamma(\epsilon)$ 的子博弈精炼均衡。

b. 试证明如果 δ 足够靠近 1 则对每个结果 $z\in(X\times T)\cup\{D\}$ 存在一个结果为 z 的 $\Gamma(\epsilon)$ 的子博弈精炼均衡（对 $x=(1,0)$ 和 $x=(0,1)$ 利用 a 部分的均衡战略来阻止偏离）。

c. 试用反证法证明：对每个 $\delta\in(0,1)$ 和每个 $\eta>0$ 存在 $\bar{\epsilon}>0$，使得若 $\epsilon<\bar{\epsilon}$，则参与人 $i(i=1,2)$ 在 $\Gamma(\epsilon)$ 的每个子博弈精炼均衡中的支付与在 $\Gamma(0)$ 的惟一子博弈精炼均衡中的支付间的差异少于 η 且协议立即达成。

7.4.3　退出

一类有趣的轮流出讨价还价博弈模型的扩展可通过这样的方式获得，即允许一个或两个参与人在博弈的各时点上"退出"（无须别的参与人同意）而不是继续讨价还价。一种简单的情形是，在其中仅有一个参与人，比如说参与人 2 可退出来，并且当他对一个出价作反应时才能这样做。用 (Out,t) 来表示在时期 t 他这样做的结果，且假定对所有 $t\in T$ 有 $(Out,t)\sim_1 D$。

先假定 $(Out,0)\prec_2(y^*,1)$。这里 y^* 是参与人 2 在标准轮流出价讨价还价博弈中惟一子博弈精炼均衡出价。那么参与人 2 退出的能力对结果没有影响：尽管参与人 2 有一附加"威胁"，但它一无所值，因为他偏好去继续讨价还价且用一期的延迟获得结果 y^*。

现在假定 $(Out,0)\succ_2(y^*,1)$。那么参与人 2 的威胁就不是一无所值

的。此情形中(在A1至A4下),在任一子博弈精炼均衡中参与人1经常提出满足$(\hat{x},0)\sim_2(Out,0)$并会被参与人2接受的有效协议$\hat{x}$,且参与人2经常提出满足$(\hat{y},0)\sim_1(\hat{x},1)$并会被参与人1接受的有效协议$\hat{y}$。因此在这情形中参与人2运用外部选择的能力使讨价还价的结果对他来说等价于他退出所导致的结果。 129

?练习129.1 试证明我们刚刚对分蛋糕博弈所描述的结论,在其中每个参与人i在$(X\times T)\cup\{D\}\cup(\{Out\}\times T)$上偏好关系由$u_i$表示,这里对所有$t$有$u_i(x,t)=\delta^t x_i$, $u_i(D)=0$, $u_1(Out,t)=0$,并且对某一$b<1$和$\delta\in(0,1)$有$u_2(Out,t)=\delta^t b$。

该结论有时被称为"外部选择原理",它对于"参与人能运用他们的外部选择的时点"这一假设并不强。例如,如果其中一个参与人可在每个时期结束时退出,而不是恰在他拒绝出价之后,那么博弈有多重子博弈精炼均衡(参看Shaked(1994)和Osborne and Rubinstein(1990,第3.12节)。

7.4.4 具有破裂风险的一个模型

最后,考虑轮流出价讨价还价博弈模型的一个修正,在其中每个时期结束时都有一个以概率$\alpha\in(0,1)$结束博弈的机会行动(在第15.4节我们将再次考虑这种情形)。假定参与人并不关心协议达成的时间;对每个参与人达成协议的压力不是参与人的不耐心而是谈判将破裂的风险。在模化该情形的(完全信息和机会行动)扩展博弈中有六类历史。其中四类类似于类型Ⅰ至Ⅳ(参看第7.2节),在其中R的每次发生被(R,C)所取代,这里C是讨价还价继续进行(而不是破裂)的机会行动。类型Ⅴ的一段历史形为$(x^0,R,C,x^1,R,C,\cdots,x^t,R)$,在其后轮到机会行动:类型的一段历史是终点且形为$(x^0,R,C,x^1,R,C,\cdots,x^t,R,B)$,这里$B$代表破裂。我们假定所有参与人在所有没有达成协议的终点历史中(即:在所有类型Ⅳ和Ⅵ的历史中)是无差别的。给定机会行动的存在,我们需要确定参与人对终点历史上不确定事件集合的偏好。同前所述,我们假定这些偏好仅依赖于最终达成的协议(不依赖于拒绝的协议的路径)。进一步,我们假定每个参与人i的偏好关系由一个效用函数$u_i: X\cup\{B\}\to\mathbb{R}$表示。(因为类型的历史不以正概率发生,不管参与人采用何种战略,参与人的偏好关系都无须非得对D排序。)最后,我们假定:对所有$x\in X$有$u_i(B)=0$, $u_i(x)\geqslant 0$且存在惟一的有效协议二元组(x^*,y^*)满足 130

$$u_1(y^*)=(1-\alpha)u_1(x^*) \text{和} u_2(x^*)=(1-\alpha)u_2(y^*). \quad (130.1)$$

(假如下列情形中也是这样，参与人正分一块蛋糕，对某一递增凹函数 w_i 有 $u_i(x_1, x_2)=w_i(x_i)$ 和 $w_i(0)=0$。

?练习 130.2　对上段中所描述的轮流出价讨价还价博弈的变形证明类似命题 122.1 的结论。

7.4.5　多于两个的参与人

命题 122.1 并没有扩展到这样一种情形，即如下分蛋糕博弈(例 120.1)的三人变形所示，在其中有多于两个的参与人。可能的协议集合是

$$X=\{(x_1, x_2, x_3): x_i \geqslant 0, \quad i=1,2,3 \text{ 且 } x_1+x_2+x_3=1\}$$

且每个参与人 i 的偏好由函数 $u_i(x, t)=\delta^t x_i (0<\delta<1)$ 表示。讨价还价过程如下。参与人 1 首先出价。由参与人 j 在时期 t 提出的出价 x 最先由参与人 $j+1(\bmod 3)$ 考虑，他可接受或拒绝它。如果他接受了，则参与人 $j+2(\bmod 3)$ 可接受或拒绝它。如果两个人都接受它，则博弈结束且 x 被实行。否则参与人 $j+1(\bmod 3)$ 在 $t+1$ 期提出下一个出价。

令 $\frac{1}{2} \leqslant \delta<1$。我们断言：对每个协议 x 存在一个 x 被立即接受的子博弈精炼均衡。这样一种均衡可用四个共同拥有的"状态"x, e^1, e^2 和 e^3 来描述，这里 e^i 是第 i 个单位向量。在状态 y 每个参与人 i 出价 y 且接受出价 z 当且仅当 $z_i \geqslant \delta y_i$。初始状态是 x。状态间的变换仅发生在一个出价被提出后和一个反应发生前。如果在任一状态 y 参与人 i 出价 z，满足 $z_i>y_i$，那么状态变成 e^j，这里 $j \neq i$ 是拥有最低指数且对他 $z_j<\frac{1}{2}$ 的参与人。这样一个参与人 j 的存在以及条件 $\delta \geqslant \frac{1}{2}$ 保证了对他来说拒绝参与人 i 的出价是最优的。促使这个均衡的主要力量是一个参与人会因为拒绝一个偏离出价而受偿：在他拒绝之后，他获得所有的蛋糕。

131

?练习 131.1　试证明如果每个参与人都只限于使用平稳战略(在其中只要他是出价人，则他出同一出价；并且，只要他是第一个或第二个反应人，则他使用同一规则接受出价)，那么上面所描述的博弈的惟一子博弈精炼均衡将蛋糕的 $\delta^{k-1}/(1+\delta+\delta^2)$ 分给参与人 $k, k=1,2,3$。

[注解]

本章中的模型,及命题 122.1 应归于 Rubinstein(1982)。对模型的解释和分析及它的应用参看 Osborne and Rubinstein(1990)。

有效将注意力限于有限边界博弈的两个模型原形在 Ståhl(1972)和 Krelle(1976, pp. 607—632)中可找到。对时间偏好的讨论见 Fishburn and Rubinstein(1982)。命题 122.1 的证明是对 Rubinstein(1982)原始证明的一个改进,且继承了 Shaked and Sutton(1984a)的思想。第 7.4.2 节的材料在 Muthoo(1991)和 van Damme, Selten, and Winter(1990)中被讨论。第 7.4.3 节中一个参与人可退出的模型由 Binmore, Shaked, and Sutton 提出;对于例子可参看 Shaked and Sutton(1984b)和 Binmore(1985)。第 7.4.4 节中的模型在 Binmore, Rubinstein and Wolinsky(1986)中被讨论。第 7.4.5 节中讲座的例子应归功于 Shaked;更详细的可参看 Osborne and Rubinstein(1990. 第 3.13 节)。对于轮流出价讨价还价博弈模型的另一个解释可参看 Rubinstein(1995)。

133 # 第 8 章

重复博弈

重复博弈模型能设计用来考察长期相互作用的关系。它抓住了参与人会考虑自己当前的行动对其它参与人将来行动的影响这一思想，并且试图去解释诸如合作、报复和威胁等现象。

8.1 基本思想

该理论蕴含的基本思想可用两人重复进行囚徒困境博弈(在图 134.1 中复制)的情形来阐述。记得这个博弈有惟一的纳什均衡，在其中每个参与人选 D；进一步来说，对每个参与人来说行动 D 严格优于行动 C，所以结果 (D, D) 的理由是很强的。尽管这样，如果两个参与人"合作"且选 C 则他们都会更好。在重复博弈理论背后的主要思想是：如果每个参与人相信背叛将终止合作从而导致其后的对他来说超过短期所得的损失，那么若博弈被重复进行，则共同想要的结果(在其中 (C, C) 在每个时期发生)是稳定的。

该理论的主要成就是在博弈中分离出了支持共同想要的结果的战略类型。该理论使我们洞察到了个人重复相互作用时的行为结构，这个结构可用"团体规范"来解释。我们描述的结论表明，维持共同想要的结果所需的团体规范涉及到每个参与人"惩罚"任一一个这样的参与人，即他们的行动是不值得要的。当我们要加强"惩罚的威胁应该是可信的"这一深嵌于子博弈精炼均衡概念的要求时，在团体规范要求惩罚者去实行威胁的情形中，团体规范也必须确保惩罚者有动力这样去做。134 在此情形中，惩罚的本质依赖于参与人如何评估将来的结果。有时惩罚阶段维持一段有限的时间就足够了，在此之后参与人转而追求共同想要的结果；有时团体规范必须给予花费了成本实行惩罚的参与人补偿。

尽管我们将这些关于均衡战略结构的结论视为该理论的主要成就，但是在经典文献中大部分结论却是将注意力集中于能被均衡维持的支付集合，以及给出这个集合所需的几乎包含所有的合理支付组合的条件。这些“无名氏定理”有两面性：一方面，它们表明了如果参与人是短视的，则不能维持的团体想要的结果在参与人有长期目标的情况下可以被维持；另一方面，它们表明重复博弈的均衡结果集合是巨大的，所以均衡概念缺乏预测的能力，“无名氏定理”在本章中是很多形式发展的焦点。不过，我们强调，从我们的观点看来，该理论的主要贡献是发现了支持共同想要的支付组合的有趣的、稳定的团体规范(战略)，而不是简单地证明产生这些支付的均衡存在。

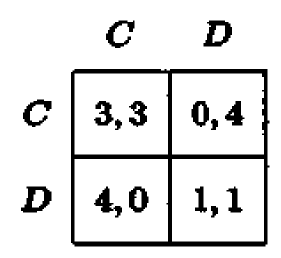
8.2 无限次重复博弈与有限次重复博弈

重复博弈模型有两个样式：期界可以是有限的，也可以是无限的。如我们要看到的那样，在两种情形中结论是不一样的，一个不同的极端(这非一般的)情形是在其中成分博弈是囚徒困境。下面我们会看到，在任一这个博弈的有限次重复中，惟一的纳什均衡结果是参与人在每个时期所选(D,D)的结果；另一方面，在无限次重复博弈中子博弈精炼均衡支付组合的集合是很大的。因此在应用重复博弈模型的特定情形中，我们需要确定是有限边界还是无限边界是比较恰当的。 135

按照我们的观点，一个模型应试图抓住参与人所领悟的现实特征；它不必试图去描述一个旁观者所领悟的现实，尽管很明显在这两种领悟间存在联系。因此具有一个在某种物理意义上是有限(或无限)边界的情形并不必意味着该情形的最优模型有有限(或无限)边界。如果在每个时期后参与人相信博弈还会持续一段时期，则一个具有无限边界的模型是恰当的，而如果参与人明显地觉察到有一个确定的最后时期，则有限边界模型是恰当的。例如，参与人有有限生命的事实，并不意味着人们会经常将他们的战略相互作用模型化为一个有限的重复博弈。如果他们进行博弈如此频繁推移非常缓慢，那么他们可能忽略边界的存在直至它的到来近在眼前，且直到这时他们的战略想法才可能被一个无限边界的博弈较好地抓住。

AR 在一个客观上是有限的情形中，决定我们应该使用有限边界模型还是无限边界模型的一个关键准则是，最后的时期是否明确地进入了参与人的战略考虑。因为这个原因，甚至一些涉及小数量重复的情形作为无限

重复博弈也能被较好地分析。例如，当实验对象被指导去用图 134.1 所示的支付(解释为美元)进行二十次囚徒困境博弈时，我相信他们的推理思路用无限次重复博弈比用有限次重复博弈能被更好地模型化，因为除非非常靠近博弈的结束，他们很可能忽略最后时期的存在。



	C	D
C	3,3	0,4
D	4,0	1,1

图 134.1　囚徒困境

MJO 重复进行囚徒困境博弈有限次的实验主体的行为，是与有限次重复博弈的惟一子博弈精炼均衡不一致的。它可能与无限次重复博弈的某个子博弈精炼均衡相一致的事实是没什么意思的，因为这样一致的结果范围是巨大的。当然无限次重复博弈的子博弈精炼均衡不能洞察到实验人的行动对支付大小和博弈长度的依赖。(证明的一个概览见 Rapoport(1987)。)实验结论明确地指明了在有限次重复的囚徒困境博弈中，子博弈精炼均衡的概念并没有抓住人类行动特征。不过，这个缺陷似乎更与子博弈精炼均衡概念固有的逆向归纳有关，而不是边界的有限性。一个能使我们理解事实的模型可能是有限重复博弈的一个变形；但是作为一个解释工具，此模型本身似乎没什么前途。而且，在成分博弈有多个纳什均衡的背景下，有限次重复博弈均衡较好地符合偶然观察；当边界较远时，人们会合作行动而当边界较近时，人们会随机行动；无限次重复博弈均衡不能使我们洞察这种行动。最后，在人们的贴现因子随时间递减至零的情形中，即使它们永不会变为零(即无固定有限边界被察觉)，均衡结果与有限次重复博弈的结果，与无限次重复博弈的结果相比更有共同之处。

136

AR 很多现存的经典文献中，一个长期的有限次重复博弈中均衡集合可能不同于相同成分博弈有限次重复的均衡集合这一事实被称为“摄动”。我发现它很有趣：两个模型抓住了生命的一个非常现实的特征，即一个预先确定的有限时期的存在，可能会决定性地影响人们的行动(考虑当政的最后几个月或宗教意图劝服他们的信仰者存在“来世”)。

MJO 首先，对于一个成分博弈的大集合，在相关的有限和无限次重复博弈的结果间没有不连续性(参看第 8.10 节)。其次，在某些不连续性确实存在的情形中，它确实是不吸引人的。如果面对已知固定距离边界的人们

如同边界是无限的那样行动，那么这就应该是有固定有限边界模型的预测；如果不是那样，就应怀疑在别的背景下子博弈精炼均衡概念的合理性了。

8.3 无限次重复博弈：定义

无限次重复博弈模型抓住了一种参与人重复进行一个战略博弈 G 的情形，我们称 G 为成分博弈(constituent game)。从始至终我们将注意力限于每个参与人的行动集合是紧的和每个参与人的偏好关系是连续的博弈。对 G 进行的次数没有限制，在每个场合参与人同时选择他们的行动。当采取行动时，一个参与人知道以前被所有参与人所选择的行动。我们将这一个情形模型化为一个完全信息(和同时行动)扩展博弈如下。

137

▶定义 137.1　令 $G=\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$ 为一战略博弈，令 $A=\times_{i\in N}A_i$。G 的一个**无限次重复博弈**(infinitely repeated game of G)是一完全信息和同时行动扩展博弈 $\langle N,H,P,(\succsim_i^*)\rangle$，其中

• $H=\{\phi\}\cup(\cup_{t=1}^{\infty}A^t)\cup A^{\infty}$(这里 ϕ 是初始历史，A^{∞} 是 G 中无穷行动组合序列 $(a^t)_{t=1}^{\infty}$ 的集合)

• $P(h)=N$，对于每个非终点历史 $h\in H$

• $\succsim_i^*$ 是 A^{∞} 上的偏好关系，它在这样的意义下将偏好关系 $\succsim_i$ 扩展，即它满足下列的弱可分性(Weak separability)条件：如果 $(a^t)\in A^{\infty}$，$a\in A$，$a'\in A$，和 $a\succsim_i a'$ 那么对所有 t 值

$$(a^1,\cdots,a^{t-1},a,a^{t+1},\cdots)\succsim_i^*(a^1,\cdots,a^{t-1},a',a^{t+1},\cdots)。$$

一段历史是终点当且仅当它是无限的。在任一非终点历史之后每个参与人 $i\in N$ 选择 A_i 中的一个行动。因此参与人 i 的一个战略是对 G 中每个有限结果序列赋 A_i 中的一个行动的函数。

我们现在将约束加在参与人的偏好关系及弱可分性上。我们假定从始至终参与人 i 在重复博弈中的偏好关系 $\succsim_i^*$ 是基于代表了他在 G 中的偏好关系 $\succsim_i$ 的一个支付函数 u_i。我们假定是否 $(a^t)\succsim_i^*(b^t)$ 仅依赖于 G 中相应支付序列 $(u_i(a^t))$ 和 $(u_i(b^t))$ 间的关系。

我们考虑偏好的三种形式，它们中的第一个定义如下。

• **贴现**(Discounting)：存在某个数 $\delta\in(0,1)$(贴现因子)使得实数序列

138 (v_i^t)与(w_i^t)至少一样好，当且仅当$\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}(v_i^t-w_i^t)\geqslant 0$。

根据这个准则一个参与人对某个贴现因子$\delta\in(0,1)$用$\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}v_i^t$来评估支付序列$(v_i^t)$。(因为我们已经假定参与人的支付值在一有限集合中，这个和是确定的。)当参与人的偏好采取这种形式时，我们称组合$((1-\delta)\sum_{t=1}^{T}\delta^{t-1}v_i^t)_{i\in N}$为在重复博弈中与成分博弈中的支付组合序列$(v^t)_{t=1}^{\infty}$相联系的**支付组合**(payoff profile)。

具有贴现因素的偏好对时期的处理是不一样的，给定的所得价值会随时间而减小。我们现在确定两个可选择的对称地处理时期的准则。在一个准则中参与人通过它的极限均值$\lim_{T\to\infty}\sum_{t=1}^{T}v_i^t/T$来本质地评价支付序列$(v_i^t)$。不过，这个极限经常不存在(对$t$期的平均支付会随$t$增加而连续地摆动)，我们所讨论的准则定义如下。(用偏好关系这个说法可便利地定义这个准则。)

- **均值极限**(Limit of means)：实数序列(v_i^t)优于序列(w_i^t)当且仅当lim inf 时$\sum_{t=1}^{T}(v_i^t-w_i^t)/T>0$(即当且仅当对所有只是有限的周期$T$，存在$\epsilon>0$使得$\sum_{t=1}^{T}(v_i^t-w_i^t)/T>\epsilon$)。

当参与人的偏好采取这种形式我们称组合$\lim_{T\to\infty}(\sum_{t=1}^{T}v_i^t/T)_{i\in N}$(如果它存在的话)为在重复博弈中与成分博弈中支付组合序列$(v^t)_{t=1}^{\infty}$相联系的**支付组合**(payoff profile)。

注意如果根据均值极限序列(v_i^t)优于序列(w_i^t)则有一个与1足够近的贴现因子，使得(v_i^t)根据贴现准则优于(w_i^t)。

在贴现准则下，单个时期中支付的一个变动可能有重大影响，而在均方差极限准则下任何有限数量时期中支付的差异都没有重大影响。一个偏好满足均方差极限的参与人为了增加他最终获得的支付流而准备在一个有限数量时期内牺牲任何损失。例如，支付流(0,…,0,2,2,…)根据均方差极限准则优于常数流(1,1,…)，而与在第一个流中参与人首先得到2的时期的序号无关。乍一看该性质可能似乎陌生，不过，考虑决策支付牺牲短期而将绝大部分重点放在长期上是不困难的(考虑民主主义者的斗争)。

我们现在介绍一个准则，它对称地处理所有时期前将重点放在长期上，但同时对单个时期中支付的变化又是敏感的。(再一次我们用严格偏好关系来确定准则。)

139 - **超越**(Overtaking)：序列(v_i^t)优于序列(w_i^t)当且仅当 lim inf $\sum_{t=1}^{T}$

$(v_i^t - w_i^t) > 0$。

下面的例子说明了三个准则间的一些差异。对任一 $\delta \in (0,1)$ 由贴现准则序列$(1,-1,0,0,\cdots)$优于$(0,0,\cdots)$，但按照其它两个准则，这两个序列是无差别的，序列$(-1,2,0,0\cdots)$根据超越准则优于$(0,0,\cdots)$，但根据均值极限准则两个序列是无差别的，序列$(0,\cdots0,1,1,\cdots)$，在其中 M 个 0 后是一个常数的序列，根据均值极限准则对每个 M 值它优于$(1,0,0,\cdots)$，但对每个 δ 存在M^*足够大，使得对所有 $M>M^*$，根据贴现准则对 δ 值后者优于前者。

令 $G=\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$ 为一战略博弈且对每个 $i\in N$ 令 u_i 为代表了$\succsim_i$的支付函数。我们定义$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的 **$\delta$－贴现的无限次重复博弈**($\delta$-discounted infinitely repeated game)为成分博弈是 G 和每个参与人 $i\in N$ 的偏好次序$\succsim_i^*$ 派生于对每个参与人使用一个贴现因子为 δ 的贴现准则的支付函数 u_i 的无限次重复博弈。同理我们可定义$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的**均方差极限无限次重复博弈**(limit of means infinitely repeated game)和$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的**超越无限次重复博弈**(overtaking infinitely repeated game)。

我们用 $u(a)$表示支付$(u_i(a))_{i\in N}$。定义一个向量 $v\in\mathbb{R}^N$为$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的一个**支付组合**，如果有一结果 $a\in A$ 满足 $v=u(a)$。我们称向量 $v\in\mathbb{R}^N$为$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的一个**可行支付组合**(feasible payoff profile)；如果它是 A 中结果的支付组合的凸组合：即，如果对具有$\sum_{a\in A}\alpha_a=1$的非负有理数 α_a 的某一集合$(\alpha_a)_{a\in A}$有 $v=\sum_{a\in A}\alpha_a u(a)$。(在经典文献中系数 α_a 允许为任一实数，而不必为有理的，当加上一点内容就是完成其证明的推广。)注意$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的一个可行支付组合不必是$\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的一个支付组合。

?练习 139.1　考虑一个无限次重复博弈，在其中参与人的偏好派生于在使用不同的贴现因子的成分博弈中他们的支付。试证明这样一种重复博弈中的一个支付组合可能是成分博弈的一个可行支付组合。

8.4 作为机器的战略

140

正如我们在本部分介绍中所讨论的，重复博弈理论的主要成就是使我

们洞察个人相互作用时的行动结构。本部分我们开发一种语言用来便利地描述我们找到的均衡结构。我们先定义一个意图作为过程抽象的机器，通过该过程参与人实施重复博弈中的战略。$\langle N, (A_i), (\succsim_i)\rangle$ 在一个无限次重复博弈中的一个**机器**(a machine)(or automation)有下列组成部分。

- 一个集合 Q_i(**状态集合**)。
- 一个元素 $q_i^0 \in Q_i$(**初始状态**)。
- 一个函数 $f_i: Q_i \to A_i$，它对每个状态赋一个行动(**输出函数**(output function))。
- 一个函数 $\tau_i: Q_i \times A \to Q_i$，它对每一个包含一个状态和一个行动组合的二元组赋一个状态(**转移函数**(transition function))。

集合 Q_i 是没有限制的，状态的名称当然没有什么意义(例如，我们称一个状态是合作的这事实，并不意味着与它相联系的行动符合它的名字)。在第 1 期机器的状态是 q_i^0 并且机器选择行动 $f_i(q_i^0)$。只要机器在某一状态 q_i 中，则它选择与那个状态相应的行动 $f_i(q_i)$。转移函数 τ_i 确定了机器如何从一个状态转移到另一个状态：如果机器在状态 q_i 中并且所选的行动组合是 a，那么它的状态转移到 $\tau_i(q_i, a)$。

注意：转移函数的输入包括当前的状态和所有参与人当前的行动组合。将当前状态和由别的参与人所选择的行动表作为输入是更自然的。这符合将一个"行动准则"战略自然地描述为一个如何在所有与某人的计划相一致的环境中行动的计划。不过，因为博弈论的定义要求一个战略对所有可能的历史确定一个行动，包括这些与参与人自己的战略不相一致的历史，所以我们得将参与人自己的行动作为一个输入归入转移函数。

为了阐明机器的概念，我们现在对在重复囚徒困境博弈(图 134.1)中的一个参与人给出四个机器的例子。

◇例 141.1 (关于"冷酷"战略的机器)下列定义的机器 $\langle Q_i, q_i^0, f_i, \tau_i\rangle$ 是完成("冷酷")战略最简单的一机器。在冷酷战略中只要两个参与人在已往的每个时期中都选 C 则选 C，否则选 D。

- $Q_i = \{\mathcal{C}, \mathcal{D}\}$
- $q_i^0 = \mathcal{C}$
- $f_i(\mathcal{C}) = C$ 且 $f_i(\mathcal{D}) = D$
- $\tau_i(\mathcal{C}, (C, C)) = \mathcal{C}$ 且若 $(\chi, (Y, Z)) \neq (\mathcal{C}, (C, C))$ 则 $\tau_i(\chi, (Y, Z)) = \mathcal{D}$。

这个机器如图141.1所示。每个方框对应于一个状态，在每个方框中是状态名，其后(符号后)是在那个状态中机器采取的行动。粗边框对应于初始状态。箭头对应于转移；同每个箭头相邻的是导致转移的结果集合。

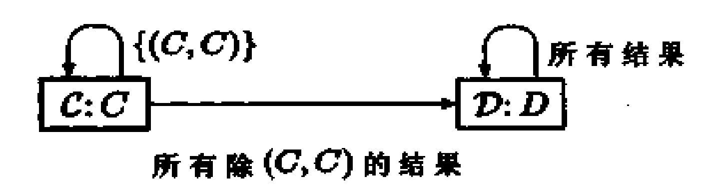


图141.1 一个与囚徒困境博弈中的冷酷战略相对应的机器

◇例141.2 如图141.2所示参与人1的机器M_1，只要参与人2采取C则参与人1采取C；在三个时期它选择D，并且如果当参与人2该选C时而选了D，则它返回C。(我们可以认为在三个时期另一个参与人因为选D而"被惩罚"，然后"被饶恕"。)注意一个机器为了实施这个战略必须有至少四个状态。

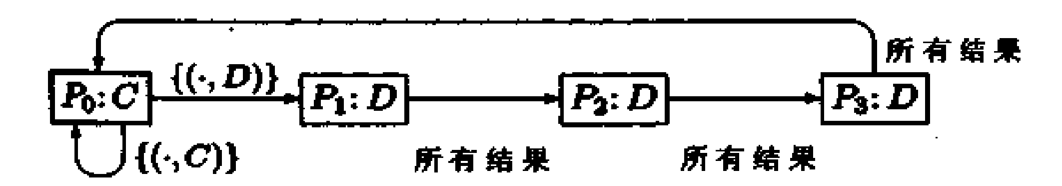


图141.2 机器M_1。在囚徒困境博弈中参与人1的机器，只要参与人2不进行C，则参与人1进行C并且在三个时期通过选择D来惩罚参与人2选择D(我们用$\{(\cdot,X)\}$来表示参与人2的行动是X的所有结果的集合。)

◇例141.3 如图142.1所示的参与人2的机器M_2由进行C开始，且在别的参与人选D条件下继续这样做。如果别的参与人选C，则它转向D，一直到别的参与人再次选D，这时它回到进行C。

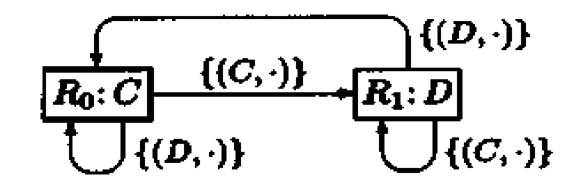


图142.1 机器M_2。在这个囚徒困境博弈中，参与人2的机器由进行C开始，当参与人1选择C，则转向D，仅当参与人选D才返回C

为了阐述当每个参与人的战略被一台机器实行时重复博弈中的每个博

弈进程，假设在囚徒困境博弈中参与人 1 使用机器 M_1 和参与人 2 使用机器 M_2。

机器各自从状态 P_0 和状态 R_0 开始。在第 1 期结果是(C,C)，因为 M_1 的输出函数赋行动 C 给状态 P_0，且 M_2 的输出函数赋行动 C 给状态 R_0。以后各期的状态由转移函数决定。M_1 的转移函数使机器在状态 P_0 中，因为第 1 期的结果是(C,C)，而对应于这个输入 M_2 的转移函数使机器从 R_0 移至 R_1。因此在时期 2 状态二元组为(P_0,R_1)。输出函数决定了在时期 2 结果为(C,D)，所以现在 M_1 从 P_0 转至 P_1，而 M_2 停留在 R_1。博弈如图 142.2 中的表所示继续至时期 5，在时期 6 状态二元组同在时期 1 一样；相应地状态和结果按前五个时期的格式循环。周期被产生这一事实 143 不是本例所特有的：只要每个参与人用有限多个状态去使用机器，则循环最终会产生，尽管在时期 1 不一定会这样。这从每台机器仅把前时期中的行动作为输入这一事实可很好理解(即它是"马氏的")。

时期	M_1的状态	M_2的状态	结果	支付
1	P_0	R_0	(C,C)	3,3
2	P_0	R_1	(C,D)	0,4
3	P_1	R_1	(D,D)	1,1
4	P_2	R_0	(D,C)	4,0
5	P_3	R_0	(D,C)	4,0
6	P_0	R_0	(C,C)	3,3

图 142.2 当参与人 1 使用图 141.2 中的机器 M_1 和参与人 2 使用图 142.1 中的机器 M_2 时，在重复囚徒困境博弈中前六个时期的结果

?练习 143.1 试证明在一个无限次重复博弈中并非每个战略都可由一台有有限个状态的机器来实施。

8.5 触发战略：纳什无名氏定理

现在研究无限次重复博弈纳什均衡结果集合。我们要证明这个集合包括了这样的结果，即它并非是成分博弈纳什均衡的重复。为了支持这一结果，每个参与人必须由"惩罚"来阻止偏离。这种惩罚可能采取多种形式。一种可能性是每个参与人使用一个"触发战略"：任何偏离都导致他实行一

个永远的惩罚性的行动。在本部分我们所研究的均衡中每个参与人都使用这一战略。

令$\langle N,(A_i)(\succsim_i)\rangle$为一战略博弈,对每个参与人$i\in N$令$u_i$为一代表了偏好次序$\succsim_i$的支付函数。记得我们将$G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的一个可行支付组合定义为一个凸组合$\sum_{a\in A}\alpha_a u(a)$。其中系数$\alpha_a$是有理数。令$w=\sum_{a\in A}\alpha_a u(a)$为这样的一个组合且假设对每一$a\in A$有$\alpha_a=\beta_a/\gamma$,这里每个$\beta_a$是一整数且$\gamma=\sum_{a\in A}\beta_a$。那么在包含了一个不确定的长度为$\gamma$的循环(其中每个$a\in A$进行$\beta_a$个时期)的重复博弈中,结果序列产生关于循环的平均支付组合,且在w的所有重复博弈中亦如此。

定义在G中参与人i的**最小最大支付**(此后记为v_i)为别的参与人可强加给参与人i的最小支付:

$$v_i=\min_{a_{-i}\in A_{-i}}\max_{a_i\in A_i}u_i(a_{-i},a_i)。\qquad(143.2)$$

满足对所有$i\in N$有$w_i\geqslant v_i$的支付组合w被称为**可实施的**(enforceable);若对所有$i\in N$有$w_i>v_i$则w是**严格可实施的**[①]。如果$a\in A$是G的一个满足$u(a)$是(严格)可实施的结果,则我们称a为G的一个**(严格)可实施的结果**。用$p_{-i}\in A_{-i}$表示在(143.2)右边最小化问题的一个解。对每个行动组合$a\in A$令$b_i(a_{-i})\in A_i$是参与人i在G中对a_{-i}的一个最优反应行动(即$b_i(a_{-i})\in B_i(a_{-i})$)。(注意$p_{-i}$和函数$b_i$仅依赖于参与人关于$A$的偏好,而不依赖于这些偏好的支付表示。)在很多经典文献中用"个人理性的"一词来代替"可实施的"。行动p_{-i}的集合是别的参与人在G中可给予参与人i的最严厉的"惩罚"。(注意我们限制惩罚为决定性的。在一些经典文献中惩罚者被允许去随机化,可能会使他们的行动与时间有关;这就改变了可行的支付组合集合和可实施的支付,而不是重复博弈均衡集合的结构。) 144

在随后的两个结论中我们将说明,参与人用均方差极限来评价支付流的无限次重复博弈的纳什均衡,支付组合集合是成分博弈的所有可行的可实施支付组合集合。第三个结论说明当参与人用一个接近1的贴现因子去贴现将来支付时也同样是几乎正确的。

■命题144.1 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$的均方差极限无限次重复博弈的每一个纳什均衡,支付组合是G的一个可实施支付组合。对任一$\delta\in(0,$

① 在很多文献中,经常使用术语"个人理性",而不是"可实施的"。

1)，G 的用 δ 贴现的无限次重复博弈的每一个纳什均衡支付组合也是 G 的一个可实施支付组合。

证明：假设 w 是 G 的均方差无限次重复博弈的一个支付组合；假设 $w_i < v_i$。那么 w 不是重复博弈的一个纳什均衡支付组合，因为对任一战略组合 s 由 $s'_i(h) = b_i(s_{-i}(h))$（对每段历史 h）所定义的参与人 i 的战略 s'_i 在每个时期给参与人 i 一个至少为 v_i 的支付。同样的证明可应用于任一 G 的用 δ 贴现的无限次重复博弈。

下面的练习请你用我们在第 8.4 节所开发的机器语言来表达在这个证明中参与人 i 的战略。

?练习 144.2　考虑一个两人的无限次重复博弈。对任一个给定的参与人 2 的机器试构造一个给参与人 1 的至少产生支付 v_1 的机器。

■命题 144.3　（均方差极限准则下的纳什无名氏定理）$G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ 的每一个可行的可实施支付组合是 G 的均方差极限无限次重复博弈的一个纳什均衡支付组合。

145　证明：令 $w = \sum_{a \in A}(\beta_a/\gamma)u(a)$ 为一个可行的可实施支付组合，这里对每一个 $a \in A$，β_a 是一个整数，$\gamma = \sum_{a \in A}\beta_a$ 且令 (a^t) 为行动组合的循环序列，对于它循环（长度为 γ）包含了 β_a 个 a 的重复（对每个 $a \in A$）。令 s_i 是参与人 i 在重复博弈中这样的战略，即在每个时期 t 都选择 a_i^t，除非存在一个较前的有单个非 i 的参与人偏离 $a^{t'}$ 的时期 t'，在此情形中它选 $(p_{-j})_i$，这里 j 是在第一个这样的时期 t' 中的偏离者。战略组合 s 是重复博弈的一个纳什均衡，因为偏离的一个参与人 j 在每一个随后的时期里获得最多为他的最小最大支付 v_j；由 s 所产生的支付组合是 w。 □

?练习 145.1　试构造一台实行本证明中参与人 i 的均衡战略 s_i 的机器。

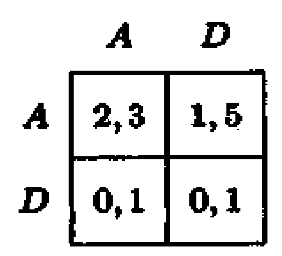
在此证明中的战略 s_i 是一个触发战略。很多别的战略可被用来证明这个结论（例如在命题 146.2 的证明中所使用的战略）。

下列是对于具有贴现的无限次重复博弈类似于命题 144.3 的结论。证明类似于上面结论的证明；我们把它留给读者。

■命题 145.2　（贴现准则下的纳什无名氏定理）令 w 为 $G = \langle N,$

$\langle(A_i),(u_i)\rangle$的一个严格可实施可行支付组合。对所有$\epsilon>0$存在 G 的用δ贴现的无限次重复博弈有一个纳什均衡支付组合w',满足$|w'-w|<\epsilon$。

为了阐述每个参与人使用一个触发战略的均衡特性,考虑两个无限重复博弈:一个为成分博弈是囚徒困境,我们对它用 G_1 表示(参看图 134.1),另一个为成分博弈是如图 146.1 所示的博弈 G_2。在 G_1 和 G_2 中每个参与人的最小最大支付是 1 且通过采用 D 每个参与人使别人的支付维持在这个水平($p_{-1}=p_{-2}=D$)。



	A	D
A	2,3	1,5
D	0,1	0,1

图 146.1 博弈 G_2

在两个博弈中,命题 144.3 的证明所使用的触发战略都涉及每个参与人对应任一从均衡路径的偏离而永远转向 D。在 G_1 中行动 D 优于行动 C,所以对每个参与人来说选 D 是一个稳定次序。因此对某个相信偏离意味着现在稳定次序的终止的惩罚者有某种理由在将来选行动 D。相反,在 G_2 中(D,D)的经常重复不是一个稳定次序,因为对参与人 1 来说 A 严格优于D。因此参与人 1 忍受他给予他对手的惩罚,使得他去惩罚偏离的威胁不可信且怀疑采用这种触发战略的均衡的合理性。我们被引致去研究子博弈精炼均衡的概念,它排除这种战略,因为它要求每个参与人的行动在每段历史后是最优的。 146

?练习 146.1 考虑无限次重复博弈,参与人的偏好由贴现准则所代表,共同贴现因子是$\frac{1}{2}$,且成分博弈是图 146.1 中的博弈。试证明$((A,A),(A,A),\cdots)$不是一条子博弈精炼均衡结果的路径。

8.6 在一段有限长的时间里惩罚:均值极限准则下的精炼无名氏定理

在命题 144.3 中用于产生任意的可实施支付组合的战略不确定地惩罚

一个偏离者。这种惩罚不一定是急躁的：仅在消除他从偏离（一个时期）的所得的足够长时期里，一个偏离者的支付才需要被降至最小最大水平。如果参与人的偏好满足差方均准则，那么在惩罚后回到均衡路径的战略同均衡路径本身一样能给惩罚者产生同一支付，所以参与人没有理由不去接受它。因此在差方均准则下仅对有限个时期惩罚的团体规范是重复博弈的子博弈精炼均衡。

■命题 146.2 （均值极限准则下精炼无名氏定理）

$G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 的每一个可行的严格可实施支付组合是 G 的均值极限无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡支付组合。

147 证明：令 $w=\sum_{a\in A}(\beta_a/\gamma)u(a)$ 为 G 的一个可行的严格可实施支付组合，且令 $(a^k)_{k=1}^{\gamma}$ 为包含了 β_a 个 a（对每个 $a\in A$）的重复的行动组合序列。

我们现在构造一个战略组合，它在 G 中产生一个包含循环 $(a^k)_{k=1}^{\gamma}$ 的不确定重复的行动组合序列。每个参与人仅在有限个时期惩罚任一偏离。为便利起见，确定每个参与人的战略使得任一惩罚仅在随循环完成后的时期开始。如果某个参与人在某个没有人应被惩罚的时期偏离，那么这个参与人，比如说是 i，就被认为是该受惩罚的；下一个循环的第一期开始别的参与人通过选择 p_{-i} 在一个足够长以至取消掉他的任何可能所得的时期内惩罚 i。随后惩罚者返回均衡，在循环的始点开始。（多个参与人的同时偏离被忽略了。）给定参与人的偏好满足均值极限准则的条件，在每段可能的历史之后支付组合是 w。

为了精确地定义战略令 g^* 为任一参与人在 G 中偏离任一行动组合所能获得的最大数量。也就是，令 g^* 为对所有 $i\in N$，$a'_i\in A_i$ 和 $a\in A$ 的 $u_i(a_{-i},a'_i)-u_i(a)$ 的最大值。因为 $w_i>v_i$ 所以存在 γ 的一个整数倍的整数 $m^*\geqslant 1$ 使得对所有 $i\in N$ 有 $\gamma g^*+m^*v_i\leqslant m^*w_i$，每个参与人 i 的战略在 m^* 个时期惩罚任一偏离，该战略由下列机器给定。

- 状态集合：$\{(Norm^k,d)$：要么 $k=1$ 且 $d=0$ 要么 $2\leqslant k\leqslant\gamma$ 且 $d\in\{0\}\cup N\}\cup\{P(j,t):j\in N$ 且 $1\leqslant t\leqslant m^*\}$。（状态 $(Norm^k,0)$ 意为我们在循环的第 k 个时期且没有人应受惩罚。状态 $(Norm^k,j)$ 意为我们在循环的第 k 个时期且参与人 j 应受惩罚。状态 $P(j,t)$ 意为参与人 j 正受惩罚且仍有 t 个应受惩罚的时期。
- 初始状态：$(Norm^1,0)$。
- 输出函数：对任一 $d\in\{0\}\cup N$ 在 $(Norm^k,d)$ 中选 a_i^k；在 $P(j,t)$ 中，

若 $i \neq j$ 则选$(p_{-j})_i$，若 $i=j$ 则选$b_i(p_{-i})$。

• 转移函数：

◦ 从 $(Norm^k, d)$移到[①] $(Norm^{k+1(\text{mod }\gamma)}, d)$除非：

• $d=0$ 且只有参与人 j 从a^k 偏离，在此情形中，若 $k \leqslant \gamma - 1$ 则移至$(Norm^{k+1}, j)$；若 $k=\gamma$ 则移至$P(j, m^*)$。 148

• $d=j \neq 0$，在此情形中若 $k \leqslant \gamma - 1$ 则移至$(Norm^{k+1}, j)$；若 $k=\gamma$ 则移至$P(j, m^*)$。

◦ 从$P(j, t)$移至：若 $2 \leqslant t \leqslant m^*$ 则为 $P(j, t-1)$；若 $t=1$ 则为$(Norm^1, 0)$。

如此定义的战略是子博弈精炼均衡的证明，我们留给读者。 □

在此证明中我们所给定的战略并不在偏离之后立即开始惩罚，而是要等到一个循环的结束。我们这样确定战略是为了方便计算阻止偏离所需的惩罚长度：如果在偏离后惩罚立即开始，那么我们将不得不考虑当我们计算所需的惩罚长度时，偏离者的支付在循环的剩余部分是很低的这一可能性，所以他从终止循环中可获得额外的支付。

?练习 148.1 （一个既有长期，又有短期参与人的博弈）考虑一个无限边界扩展博弈，在其中战略博弈 G 在参与人 1(长期的)和一个参与人无限序列间进行，序列中的每个参与人仅存在一期且被告知在以往各期中所采取的行动。参与人 1 通过均值极限评价支付序列，别的参与人仅在他存在的那期对他所得的支付感兴趣。

a. 试找出当 G 是囚徒困境博弈(参看图 134.1)时博弈的子博弈精炼均衡集合。

b. 试证明：当 G 是这样的囚徒困境博弈时，在其中给(C, D)的参与人 2 的支付为 0，那么对每个有理数 $x \in [1,3]$存在一个子博弈精炼均衡，其中参与人 1 的平均支付是 x。

考虑成分博弈由图 146.1 所给定的无限次重复博弈。在此博弈中$v_1 = v_2 = 1$。考虑命题 146.2 的证明中所定义的战略组合来支持结果序列(a^t)，其中对所有 t，$a^t = (A, A)$采取下列形式：每个参与人在每个时期(循环长度为 1)选 A 除非别的参与人在以前的时期偏离，在此情形中他在$m^* = 2$个时期选 D 然后回到A。

---

① 我们定义 $m(\text{mod }\gamma)$为满足 $1 \leqslant q \leqslant \gamma$ 的整数q，且对某个整数 ℓ 满足 $m = \ell\gamma + q$（所以，特别地，$\gamma(\text{mod }\gamma) = \gamma$）。

当参与人的偏好由超越准则或贴现准则所代表时，这个战略组合不是无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡。在参与人 2 的一个偏离之后，每个参与人被假设为在返回 A 之前在两个时期选 D。参与人 1 选 A 比惩罚参与人 2 更好，因为支付序列$(1,1,2,2,\cdots)$（在两个准则下都优于序列$(0,0,2,2,\cdots)$。（在均值极限准则下两个序列是无差别的）为了支持在每个时期结果为(A,A)的路径为一子博弈精炼均衡，如果参与人 1 不完成她惩罚参与人 2 的义务，则参与人 2 不得不惩罚参与人 1。进一步说如果参与人 2 因为参与人 1 没惩罚他而不惩罚参与人 1，则参与人 2 必受惩罚。如此等等。在下面两部分我们用具有这些性质的战略去证明当参与人的偏好由超越和贴现准则所表示时的精炼无名氏定理。

8.7 惩罚惩罚者：超越准则下的精炼无名氏定理

下面是一个在超越准则下类似于命题 146.2 的结论；它表明了当参与人的偏好用超越准则表示时，不同于那些用于证明均值极限准则下精炼无名氏定理的战略如何能支持想要的结果。为了简单，我们仅就均衡路径包括惟一（严格可实施的）结果的重复这一情形构造一个战略组合。

■命题 149.1 （超越准则下精炼无名氏定理）对 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 的任一严格可实施结果 a^* 都存在 G 的超越无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡，它产生路径(a^t)，在其中对所有 t，有 $a^t=a^*$。

证明：令 M 为对所有 $i\in N$ 和 $a\in A$ 的 $u_i(a)$ 的最大值。考虑每个参与人 i 使用下列机器的战略组合。

• 状态集合：$\{Norm\}\cup\{P(j,t):j\in N$ 且 t 是一个正整数$\}$。（在状态 $P(j,t)$ 参与人 j 还要在 t 个时期受惩罚。）

• 初始状态：$Norm$。

• 输出函数：在 $Norm$ 中选择 a_i^*。在 $P(j,t)$ 中若 $i\neq j$ 选$(p_{-j})_i$，若 $i=j$ 则选 $b_i(p_{-i})$。

• 对应于一个结果 $a\in A$ 的转移。

• 从$Norm$，一直呆在 $Norm$ 除非对某个参与人 j 我们有 $a_{-j}=a_{-j}^*$ 和 $a_j\neq a_j^*$（即，j 是惟一的从 a^* 偏离者），在这情形下移至 $P(j,t)$，这里 t 是

使$M+tv_j<(t+1)u_j(a^*)$的最小的整数。

◦ 从$P(j,t)$:

• 如果$a_{-j}=p_{-j}$或对至少两个参与人l有$a_l\neq(p_{-j})_l$(即所有的参与人都惩罚或至少两人不这样做)那么若$t=1$则移至$Norm$,若$t\geq 2$则移至$P(j,t-1)$。

• 如果$a_{-j}\neq p_{-j}$且若$l\neq j^*$有$a_l=(p_{-j})_l$(即j^*是惟一不惩罚的惩罚者)那么移至$P(j^*,T(j,t))$,这里$T(j,t)$足够大使得在状态$P(j,t)$中j^*的支付与他在随后的$T(j,t)$个时期若他不偏离的支付和大于他在偏离中的支付加上$T(j,t)v_j^*$。(这样一个数$T(j,t)$存在因为在t个时期后参与人被认为回到均衡结果a^*且$u_{j^*}(a^*)>v_{j^*}$))。

在此战略组合下,在任一段历史(包括一段在其后惩罚被认为会发生的历史)后,一个参与人通过单边偏离去增加他支付的任何努力都被别的参与人随后的惩罚抵消了,再一次我们留给读者去证明该战略组合是一子博弈精炼均衡。 □

8.8 回报惩罚的参与人:贴现准则下精炼无名氏定理

在命题149.1的证明中所定义的战略组合,在其中参与人因为没有给予他们被分配到的惩罚而被惩罚,可确定当参与人的偏好由贴现准则表示时,该战略可能不会是一个子博弈精炼均衡。理由如下:在此战略组合下,一个没有加入假定为持续(比如说是)t个时期惩罚的参与人,他自己被惩罚(比如说是)t^*个时期,这里t^*可能远远大于t。进一步的偏离可能需要更长的惩罚,从而有战略应被设计用来完成无限长的惩罚。这一结论不管贴现率有多小,可能因此会有导致永远不能被恢复的损失的某个惩罚。结果是,如果参与人的偏好由贴现准则表示,则战略组合可能不会是一子博弈精炼均衡。

为了对参与人的偏好由贴现准则所表示的情形建立一个类似于命题149.1的命题,我们构造一个新战略。在这个战略中惩罚了由战略所确定 151

的偏离者的参与人随后会得到补偿，从而使得他们完成指派是值得的。如在前面部分一样，我们仅就均衡路径包含惟一(严格可实施的)结果重复的情形构造一个战略组合。该结论需要对博弈集合有个常被称为满维(full dimensionality)的限制。

■命题 151.1 (贴现准则下精炼无名氏定理)令 a^* 为 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 的一个严格可实施结果。假设有 G 的一个严格可实施结果族 $(a(i))_{i\in N}$ 使得对每个参与人 $i\in N$ 我们有 $a^*\succ_i a(i)$，且对所有 $j\in N\setminus\{i\}$ 有 $a(j)\succ_i a(i)$。那么存在 $\underline{\delta}<1$ 使得对所有 $\delta>\underline{\delta}$ 有 G 的用 δ 贴现的无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡，它产生路径 (a^t)，在其中对所有 t 有 $a^t=a^*$。

证明：每个参与人使用下列机器的战略组合是在每个时期支持结果 a^* 的一个子博弈精炼均衡。该机器有三种类型。在状态 $C(0)$ 由参与人所选择的行动组合是 a^*。对每个 $j\in N$ 状态 $C(j)$ 是一个在参与人 j 的任一惩罚完成后被进入的"修改"状态；在此状态中被选择的行动组合是 $a(j)$。对每个参与人 j 和在 1 与某个后来我们将确定的数 L 间的时间 t，状态 $P(j,t)$ 是一个参与人 j 被认为仍有 t 期被惩罚的状态；在此状态中每个非 j 的参与人 i 采取行动 $(p_{-j})_i$，它使得 j 降到他的最小最大支付。如果在任一状态中任一参与人 i 偏离，则有一至状态 $P(i,L)$ 的转移(即，别的参与人计划在 L 个时期惩罚参与人 i)。如果在惩罚的 L 个时期中没有任何时期存在单个参与人的偏离，则状态变为 $C(i)$。状态集合 $\{C(i)\}$ 作为一个惩罚在惩罚时期不执行规定的参与人的系统：如果参与人 i 不像所认为的那样去惩罚参与人 j，那么状态就变为 $C(j)$ 了，基本结果是 $a(j)$，参与人 i 在 L 个时期被惩罚，在此之后状态变为 $C(i)$，在其中结果是 $a(i)\prec_i a(j)$

简言之，参与人 i 的机器定义如下：这里为了方便我们写成 $a(0)=a^*$；后面我们再确定 L。

152

- 状态集合：$\{C(j):j\in\{0\}\cup N\}\cup\{P(j,t):j\in N$ 且 $1\leq t\leq L\}$。
- 初始状态：$C(0)$。
- 输出函数：在 $C(j)$ 中选 $(a(j))_i$，在 $P(j,t)$ 中若 $i\neq j$ 选 $(p_{-j})_i$，若 $i=j$ 则选 $b_i(p_{-i})$。
- 对应于一个结果 $a\in A$ 的转移是：
  - 从 $C(j)$：一直呆在 $C(j)$ 除非单个参与人 k 从 $a(j)$ 偏离，在此情形中移到 $P(k,L)$。
  - 从 $P(j,t)$：
    - 如果单个参与人 $k\neq j$ 从 p_{-j} 偏离，那么移至 $P(k,L)$；

• 否则若 $t\geq 2$ 移至 $P(j,t-1)$ 或若 $t=1$ 移至 $C(j)$。

我们现在确定$\underline{\delta}$和 L 的值。同前，令 M 为对所有 $i\in N$ 和 $a\in A$ 的 $u_i(a)$的最大值，我们选 L 和$\underline{\delta}$ 足够大使得所有可能的偏离被阻止。为了阻止任一参与人在任一状态 $C(j)$中的偏离，我们取 L 足够大使得对所有 $i\in N$，和所有 $j\in\{0\}\cup N$ 有 $M-u_i(a(j))<L(u_i(a(j))-v_i)$并且选 $\delta>\delta^*$，这里 δ^* 非常靠近 1，使得对所有 $\delta>\delta^*$ 我们有

$$M-u_i(a(j))<\sum_{k=2}^{L+1}\delta^{k-1}(u_i(a(j))-v_i).$$

[这个条件是充分的，因为对 $j\neq i$，有 $u_i(a(j))>u_i(a(i))$。]对 $j\neq i$ 如果一个参与人 i 偏离 $P(j,t)$那么他在由 L 个 $v_i<u_i(a(i))$的时期相随的偏离时期内最多获得 M 且随后获得 $u_i(a(i))$。如果他不偏离则对于 1 和 L 间的时期他获得 $u_i(p_{-j},b_j(p_{-j}))$且随后获得 $u_i(a(j))$。因此为了阻止偏离下列做法是充分的：选$\underline{\delta}>\delta^*$足够靠近 1 使得对所有 $\delta>\underline{\delta}$ 我们有

$$\sum_{k=1}^{L}\delta^{k-1}(M-u_i(p_{-j},b_j(p_{-j})))<\sum_{k=L+1}^{\infty}\delta^{k-1}(u_i(a(j))-u_i(a(i)))。$$

(这样一个$\underline{\delta}$ 值存在因为我们假设了若 $i\neq j$ 则 $u_i(a(j))>u_i(a(i))$。) □

?练习 152.1　考虑三人对称无限次重复博弈，在其中每个参与人的偏好由贴现准则表示且成分博弈是$\langle\{1,2,3\},(A_i),(u_i)\rangle$，这里对 $i=1,2,3$ 我们有 $A_i=[0,1]$且对所有$(a_1,a_2,a_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ 有 $u_i(a_1,a_2,a_3)=a_1a_2a_3+(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)$。

a. 试找出成分博弈的可实施支付集合。　153

b. 试证明对任一贴现因子 $\delta\in(0,1)$在重复博弈的任一子博弈精炼均衡中任一参与人的支付至少为$\frac{1}{4}$。

c. 用命题 151.1 来修改这些结论。

8.9 贴现准则下子博弈精炼均衡结构

在命题 151.1 的证明中所构造的每个参与人在均衡中的战略(它仅关心贴现因子靠近 1 的博弈)，具有当任一参与人偏离时随后的行动组合序列，仅依赖于偏离者的认定而不依赖于偏离前的历史这一特殊性质。在这

部分我们要证明对任一共同贴现因子支持任一子博弈精炼均衡结果的这种战略的一个组合都能被找到。

我们以两个引理开始，其中第一个将引理 98.2 中对有限扩展博弈证明了的一次偏离性质扩展到贴现的无限次重复博弈。

■引理 153.1　一个战略组合是 G 的用 δ 贴现的无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡，当且仅当没有参与人在任一段历史之后的单个时期内通过偏离能有所得。

?练习 153.2　证明这个结论。

下一个结论证明了在我们的假设下任一用 δ 贴现的无限次重复博弈的子博弈精炼均衡，支付组合集合是闭的。

■引理 153.3　令$(w^k)_{k=1}^{\infty}$为一个 G 的用 δ 贴现的无限次重复博弈的子博弈精炼均衡支付组合的序列，它收敛到 w^*。那么 w^* 是这个重复博弈的一个子博弈精炼均衡支付组合。

证明：对 k 的每个值令 s^k 为重复博弈的产生支付组合 w^k 的一个子博弈精炼均衡。我们构造一个战略组合 s，我们将证明它为一个子博弈精炼均衡且产生支付组合 w^*。我们通过对历史 h 长度的归纳，来定义 G 的一个行动组合 $s(h)$ 和一个附加的序列(s^k)的无限子序列(r^k)，它的性质是在历史 h 之后的子博弈中，由子序列元素所产生的支付组合有一极限且行动组合 $r^k(h)$ 收敛到 $s(h)$。假设我们对所有长度为 T 或更小的历史已这样做了，并考虑长度为 $T+1$ 的一段历史(h,a)，这里 h 是长度为 T 的一段历史。令(r^k)为我们对历史 h 所选择的战略组合序列，且令 $s(h)$ 为我们对那段历史所选择的行动组合。对 $a=s(h)$ 为(h,a)选择(r^k)的一个子序列(r'^k)，使得$(r'^k(h,a))$收敛且令 $r'^k(h,a)$收敛到的行动组合是 $s(h,a)$。显然我们已选择的子序列的收敛支付组合同(r^k)的是一样的。当 $a\neq s(h)$时，为(h,a)选择(r^k)的一个子序列(r''^k)使得支付组合序列和序列$(r''^k(h,a))$都收敛，且令 $r''^k(h,a)$收敛到的行动组合是 $s(h,a)$。

没有参与人 i 通过在历史 h 后改变他的行动且导致一个代替 $s(h)$ 的某个结果 a，从 s_i 的偏离中有所得，因为如果是这样的话，那么对足够大的 k，他能从 r_i^k 偏离中获利，这里(r^k)是我们为(h,a)所选择的序列。进一步说，s 的支付组合是 w^*。 □

由此推论任一参与人 i 在重复博弈中的子博弈精炼均衡支付集合是闭

的;因为它有界所以有一最小值,我们用 $m(i)$ 表示它。令 $(a(i)^t)$ 为参与人 i 的支付是 $m(i)$ 的子博弈精炼均衡的结果。

■**命题 154.1** 令 (a^t) 为 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 的用 δ 贴现的无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡结果。那么每个参与人 i 使用下列机器的战略组合是具有相同结果 (a^t) 的一个子博弈精炼均衡。

- 状态集合:$\{Norm^t: t$ 是一正整数$\}\cup\{P(j,t): j\in N$ 且 t 是一正整数$\}$。
- 初始状态:$Norm^1$。
- 输出函数:在状态 $Norm^t$ 进行 a_i^t,在状态 $P(j,t)$ 进行 $a(j)_i^t$。
- 转移函数:
  - 在状态 $Norm^t$ 移至 $Norm^{t+1}$ 除非恰好有一参与人,比如说 j,从 a^t 偏离,在此情形中移至 $P(j,1)$。
  - 在状态 $P(j,t)$:移至 $P(j,t+1)$ 除非恰好有一参与人,比如说 j',从 $a(j)^t$ 偏离,在此情形中移至 $P(j',1)$。

证明:利用引理 153.1,可直接证明这确定了一个符合所要求性质的子博弈精炼均衡。 □

8.10 有限次重复博弈

155

8.10.1 定义

我们现在研究有限次重复博弈。有限次重复博弈的正式表达非常类似于无限次重复博弈:对任一正整数 T,战略博弈 $\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$ 的一个 T 期有限次重复博弈是满足定义 137.1 中的条件的一个完全信息扩展博弈,此时符号 ∞ 由 T 代替。我们将注意力限于在有限次重复博弈中每个参与人 i 的偏好关系 $\succsim_i^*$ 由函数 $\sum_{t=1}^{T}u_i(a^t)/T$ 代表的情形,这里 u_i 是代表参与人 i 在成分博弈中的偏好的一个支付函数。我们称此博弈为 $\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 的 **T 期重复博弈**(T-period repeated game)。

8.10.2 纳什均衡

对无限次重复博弈无名氏定理的直观证明是,一个共同想要的结果可

通过一种稳定的社会安排支持，在这种安排中，一个参与人由于他若偏离则要被惩罚这一威胁，使得他被阻止偏离。通过修改同样的证明也可应用于一大类有限次重复博弈。需要修改的根源在于这样的事实，即在任一有限次重复博弈的任一纳什均衡的最后一期的结果，必须是成分博弈的一个纳什均衡，这是个对博弈的其余部分起预示作用的事实。对于每个参与人的支付在成分博弈的每个纳什均衡中都等同于他的最小最大支付（如同在囚徒困境中一样）这一特殊情形，这个预示最长。在下列情形中无名氏定理之后的直观证明无效：在每个时期的结果必须是成分博弈的一个纳什均衡，因为如果有某个时期结果不是这样的一均衡，那么在最后的这种时期中某个参与人能不受惩罚地偏离，下面的结论系统表达了这个证明。

■**命题 155.1** 如果在战略博弈 G 的每个纳什均衡中支付组合是 G 中最小最大支付组合(v_i)，那么对任一 T 值，G 的 T 期重复博弈的每个纳什均衡的结果$(a^1,\cdots,a^T)$具有性质：对所有 $t=1,\cdots,T$，a^t 是 G 的一个纳什均衡。

证明：令 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 且令 $a=(a^1,\cdots,a^T)$为 G 的 T 期重复博弈的一个纳什均衡 s 的结果。假定对每个时期 a^t 不是 G 的一纳什均衡。令 $t\geqslant 1$ 为 a^t 不是 G 的一纳什均衡的最后时期；假定 $u_i(a^t_{-i},a_i)>u_i(a^t)$。考虑参与人 i 的在每段最长为 $t-2$ 的历史后符合 s_i 规程的战略 $\hat{s}_i$，在时期 t 选 a_i，在每个随后的时期给定由别的参与人这样的行动选择一个产生他的最小最大支付的行动。$(s_{-i},\hat{s}_i)$的结果是一段终点历史 $\hat{a}$，直到 $t-1$期它与 a 是一样的；参与人 i 对$\hat{a}^t$ 的偏好L 优于a^t 且对$s\geqslant t+1$ 在 $\hat{a}^s$ 和 a^s 间是无差别的。所以参与人 i 的偏好$\hat{a}$ 优于偏好a，违背了我们关于 s 是重复博弈的一个纳什均衡的假设。 □

156

该结论只适用于一个很小的博弈集合。如果同结论的假设相反，成分博弈有一纳什均衡，其中某个参与人的支付超过他的最小最大支付，那么只要在最后一期的结果是 a^*，那个参与人在倒数第二个时期会因为偏离而被惩罚。参与人的最小最大支付与他在 a^* 中的支付间差别较小，则这个惩罚就可能不够大到阻止偏离。不过，常有某整数 L，使得如果在最后 L 个时期结果为 a^*，那么参与人在任一这种 L 段博弈序列开始前的时期进行的任何偏离都会由于在剩余的时期里强加给参与人他的最小最大支付这一威胁而被阻止。进一步说，L 值不依赖于博弈的长度，所以，如果对每个参与人成分博弈有一参与人的支付超过他们最小最大支付的均衡，那么对

足够大的 T,作为在 T 期重复博弈的一个纳什均衡中的平均支付组合,任一可行的严格可实施支付组合都能被近似获得。为了简便,我们仅就成分博弈有一个惟一的且其中的每个参与人的支付都超过他的最小最大支付的纳什均衡这一情形来叙述并证明这一结论。

■命题 156.1 (有限次重复博弈纳什无名氏定理)

如果 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 有一纳什均衡 $\hat{a}$,其中每个参与人 i 的支付都超过了他们最小最大支付 v_i,那么对 G 的任一严格可实施结果 a^* 和任一 $\epsilon>0$ 存在一个整数 T^*,使得如果 $T>T^*$,则 G 的 T 期重复博弈有一纳什均衡,在其中每个参与人 i 的支付在 $u_i(a^*)\pm\epsilon$ 之间。

证明:考虑由下列机器所完成的参与人 i 的战略。状态集合包括对 $t=1,\cdots,T-L$ 的 $Norm^t$(L 在后面确定),$Nash$ 及对每个 $j\in N$ 的 $P(j)$,每个参与人 i 在 $Norm^t$ 中对所有 t 值选 a_i^*,在 $Nash$ 中选 $\hat{a}_i$,且在 $P(j)$ 中通过选择 $(p_{-j})_i$ 惩罚参与人 j。如果有惟一参与人 j 在状态 $Norm^t$ 中偏离,那么就有一个至 $P(j)$ 的转移;否则若 $t<T-L$ 则有一至 $Norm^{t+1}$ 的转移且若 $t=T-L$ 则有一至 $Nash$ 的转移。一旦到达,状态 $P(j)$ 和 $Nash$ 就不会被离开。结果是在前 $T-L$ 期 a^* 被选择,在最后 L 期 $\hat{a}$ 被选择,简言之,参与人 i 的机器如下。 157

- 状态集合:$\{Norm^t:1\leqslant t\leqslant T-L\}\cup\{P(j):j\in N\}\cup\{Nash\}$。
- 初始状态:$Norm^1$。
- 输出函数:在 $Norm^t$ 选 a_i^*,在 $P(j)$ 选 $(p_{-j})_i$,且在 $Nash$ 中选 $\hat{a}_i$。
- 转移函数:

  ◦从 $Norm^t$ 移至 $Norm^{t+1}$ 除非或者 $t=T-L$,在此情形中移至 $Nash$ 或者恰好有一参与人,比如说是 j,从 a^* 偏离,在此情形中移至 $P(j)$。

  ◦对任一 $j\in N$ 的 $P(j)$ 和 $Nash$ 都是吸收的。

L 还有待确定。一个有利的偏离仅在状态 $Norm^t$ 中是可能的。为阻止这种偏离,我们要求 L 足够大使得对所有 $i\in N$ 有 $\max_{a_i\in A_i}u_i(a_{-i}^*,a_i)-u_i(a^*)\leqslant L(u_i(\hat{a})-v_i)$。最后,为了获得 $u(a^*)\pm\epsilon$ 间的一个支付组合,我们选择 T^*,使得对所有 $i\in N$ 有 $|[(T^*-L)u_i(a^*)+Lu_i(\hat{a})]/T^*-u_i(a^*)|<\epsilon$。 □

☐练习 157.1 将此结论扩展到在 G 的纳什均衡中参与人 i 的支付超过 v_i 可能依赖于 i 的这种情形。

8.10.3 子博弈精炼均衡

在有限次重复博弈的任一子博弈精炼均衡中，在任一段历史后(而不仅仅是在若每个参与人拥护他的战略才发生的历史后)最后时期中的结果是成分博弈的一个纳什均衡。所以用于证明纳什无名氏定理(命题156.1)战略中的惩罚，是与子博弈精炼均衡不一致的；确实，如果成分博弈有惟一的纳什均衡支付组合，那么不可能有惩罚。随后我们有下列结论。

■命题157.2　如果战略博弈 G 有惟一的纳什均衡支付组合，那么对 T 的任一值，在 G 的 T 期重复博弈的任一子博弈精炼均衡中，任一历史之
158 后所选择的行动组合是 G 的一纳什均衡。

证明：在从重复博弈的任一子博弈精炼均衡的时期 T 开始的任一子博弈的结果都是 G 的一纳什均衡。因此在博弈的最后时期每个参与人的支付与历史无关。相应地，在任一从 $T-1$ 时期开始的子博弈中，行动组合是 G 的一纳什均衡。用归纳法可完成证明。□

	C	D	E
C	3,3	0,4	0,0
D	4,0	1,1	0,0
E	0,0	0,0	$\frac{1}{2},\frac{1}{2}$

图158.1　一个修改了的囚徒困境博弈

如果成分博弈有不止一个纳什均衡支付组合，那么惩罚可嵌在一个子博弈精炼均衡战略组合中：参与人在博弈的最后时期的支付会依赖于他们在以前各期的行动。下例说明了该情形中引出的均衡。我们认为在图158.1战略博弈的 T 期重复博弈中有一个子博弈精炼均衡。对于它在最后三期结果是(C,C)，在其余各期结果是(D,D)，所以若 T 较大则平均支付组合靠近(3,3)。在均衡中每个参与人使用下列战略：在每个直到 $T-3$ 期的时期选 C 除非有一个参与人在以前的某个时期选 D，此情形中在每个随后的时期选 E，而不管随后的结果，如果在直到 $T-3$ 期的结果是(C, C)，那么在最后三期选 D。一段在以前各期结果是(C,C)的历史之后，在

任一未到 $T-3$ 期的时期偏离到 D 的参与人可在那个时期获得一单位支付，但是随后会失去至少 1.5 个单位，因为别的参与人在随后的每个时期选 E。也就是，随后进行 E 的威胁足够阻止任一偏离；这个惩罚是可置信的。因为(E,E)是成分博弈的一个纳什均衡。（注意到如果在成分博弈中支付组合(1/2,1/2)由(0,0)代替。则同样的战略组合也是一子博弈精炼均衡。159 在此情形中成分博弈不同于囚徒困境之处仅在于每个参与人另有一个弱劣行动。）

这个例子表明了如果有两个成分博弈 G 的纳什均衡，其中一个优于另一个。那么任一支付组合，在其中每个参与人获得多于在较劣的 G 的纳什均衡中的支付，都可作为在 G 的 T 期（对足够大的 T）重复博弈的一个子博弈精炼均衡中的平均支付组合得到。实际上可建立一个更强的结论：任一严格可实施支付组合都可作为在重复博弈的一个子博弈精炼均衡中的平均支付得到。这一支付组合由这样的战略组合支持，即直到博弈的最后时期都类似于在证明命题 151.1 中所构造的战略组合。

证明（类似于在命题 151.1 和 156.1 证明中的思想）如下，令 a^* 为 G 的一个严格可实施结果。在产生一个当 T 较大时平均支付组合接近于 $u(a^*)$的结果序列的 T 期重复博弈中，一个战略组合有下列形式。共有三个阶段。在前两个阶段从始至终每个参与人 i 只要没有参与人偏离就选 a_i^*。在第三阶段参与人在没有偏离的情况下附着成分博弈纳什均衡的一个序列，对于它每个参与人的平均支付超过他在成分博弈中的最低纳什均衡支付。偏离按下列形式被惩罚。在第一阶段发生的偏离由别的参与人采用一个使偏离者降到他的最小最大支付的足够长以至消除他的所得的行动来惩罚。在这个惩罚完成后，一个"修改"的状态被进入足够长来回报为完成他们的指派而加入惩罚的参与人（参见在命题 151.1 证明中的战略）。由某个参与人 i 发生在第二期的偏离被忽略直到第三阶段的开始，在此期间对于参与人 i 来说最坏的纳什均衡在每个时期被执行。在最后一个阶段的偏离不需要受惩罚，因为在每个时期结果是成分博弈的一个纳什均衡。第二个阶段的长度被选为足够长使得对一个在第一阶段最后一个时期偏离的参与人来说，惩罚和随后的修改都可在第二阶段中完成。给定第二阶段的长度，第三阶段的长度被选为足够大使得在第二阶段的第一期偏离的参与人在给定他的从第三阶段的第一期开始的惩罚情况下境况更差。160 第二和第三阶段长度的下边界不依赖于 T，所以对足够大的 T 由战略组合所导致的平均支付组合靠近 $u(a^*)$。

在下列结论的叙述中，我们将注意力限于包含了成分博弈惟一结果的

重复的均衡路径(就像我们在上面的讨论中那样做)。我们忽略了证明,它可在 Krishna(1989)中找到。

■命题 160.1 (有限次重复博弈的精炼无名氏定理)令 a^* 为 $G=\langle N,(A_i),(u_i)\rangle$ 的一个严格可实施结果。假定(i)对于每个 $i\in N$ 有 G 的两个纳什均衡,它们的不同之处在于参与人 i 的支付;(ii)存在 G 的一个严格可实施结果 $(a(i))_{i\in N}$ 使得对每个参与人 $i\in N$,我们有 $a^*\succ_i a(i)$ 及对所有 $j\in N\setminus\{i\}$ 有 $a(j)\succ_i a(i)$。那么对于任一 $\epsilon>0$ 存在一个整数 T^*,使得若 $T>T^*$ 则 G 的 T 期重复博弈有一子博弈精炼均衡,在其中每个参与人 i 的支付在 $u_i(a^*)\pm\epsilon$ 之间。

[注解]

较早关于重复博弈的概念和纳什无名氏定理之后的思想的讨论出现在 Luce 和 Raiffa(1957, pp. 97 – 105(特别是 p.102)及 Appendix 8), Shubik (1959b, Ch. 10(特别是 p.226))和 Friedman(1971)。均值极限准则下的精炼无名氏定理由 Aumann 和 Shapley 及 Rubinstein 在 70 年代中期建立;参看 Aumann 和 Shapley (1994)和 Rubinstein (1994)。超越准则下的精炼无名氏定理(命题 149.1)应归于 Rubinstein(1979)。贴现准则下的精炼无名氏定理(命题 151.1)应归于 Fudenberg 和 Maskin(1986);我们所给的证明基于 Abreu, Dutta, 和 Smith (1994),第 8.9 节基于 Abreu(1988)。命题 155.1 及有限次重复博弈的纳什和精炼无名氏定理(命题 156.1 和 160.1)应归于 Benoît 和 Krishna(1985, 1987)。(Luce 和 Raiffa(1957,第 5.5 节)较早地讨论了对于囚徒困境命题 155.1 的结论。)

对于有限次与无限次重复博弈间差别的(第 8.2 节)的较早讨论可参看 Aumann(1959,第 6 节)。对于一个详细的关于在结果上偏好关系的讨论可参看 Diamond(1965)。对于用机器语言对某些无名氏定理的表达参看 Ben-Porath 和 Peleg (1987)。图 158.1 中的例子摘自于 Benoît 和 Krishna (1985);Friedman(1985)包含了一个相似的例子。练习 148.1 应归于 Fudenberg 和 Levine(1989)。练习 152.1 摘自于 Fudenberg 和 Maskin(1986)。

对于当参与人使用混合战略时所引起的问题的讨论可参看 Fudenberg 和 Maskin (1991)。如我们所知,一个重复博弈的均衡并不都是有效的;进

一步说，在一个偏离发生之后由一个均衡所产生的结果可能不是有效的，即使结果在无偏离的情况下是有效的。Pearce(1992，第 4 节)讨论了一个模型，它检验了允许参与人集合在任一段历史后从他们现存的状态组合转移至帕累托最优组合(即至“再谈判”)的结果。如果在一个重复博弈中一些或全部参与人不知道成分博弈的形式，那么很多新问题将产生。Zamir(1992)和 Forges(1992)都是该领域工作的概览。

Krishna(1989)，Sorin(1990，1992)，Fudenberg(1992)和 Pearce(1992)都是覆盖了本章中的材料及其扩展的概览。

163 第 9 章

重复博弈中复杂性的考虑

本章我们考察无限次重复博弈中均衡战略的结构，在此博弈中每个参与人都关心他的战略复杂性。

9.1 介绍

在前一章我们描述了被称为“无名氏定理”的一组结论的代表，它确定了在众多关于参与人偏好的假设下，一个范围很宽的支付与纳什均衡甚至与无限次重复博弈中子博弈精炼均衡相容。无名氏定理给出了产生所需结果的一些均衡的构造。它并不要求这些均衡战略在任何意义下是合理的；我们对证明中所使用的均衡战略性质的判断都是非正式的。在本章我们将利用前面各章中所描述的“机器”这一工具来进一步关注均衡战略的结构，而不是均衡支付集合。

表述分析所依赖的基本假设是参与人关心他们战略的复杂性。当选择一个战略时，参与人面临着一笔交易：一方面他希望他的战略尽可能好地服务于他的目标，另一方面他希望它尽可能简单。参与人有很多理由认为简单有价值：计划越复杂它越有可能破产，它越难学，它需更多时间去完成。在这里我们不研究这些理由，而简单地假设复杂性是有成本的，且复杂性在决策主体的控制之下。

164 我们探讨这一假设对无限次重复博弈均衡结果的影响，特别地要探究复杂性成本的引入如何影响模型的预测。尽管我们将注意力限于重复博弈，但在任一选择模型背景下复杂性考察都可被研究。包含这种决策“程序”方面的模型称为“有限理性”模型。

9.2 复杂性与机器博弈

为了简便，本章中我们将注意力限于参与人的偏好由贴现准则所表示的无限次重复博弈：我们在 $G=\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ 的两人用 δ 贴现的无限次重复博弈中研究参与人的行为(参看第8.3节)。我们研究这种行为是通过分析一个机器博弈进行的，在其中每个参与人选择一台机器去进行无限次重复博弈。本章中我们定义参与人 i 的一台机器为一四元组 $\langle Q_i, q_i^0, f_i, \tau_i\rangle$，其中

- Q_i 是一状态集合
- $q_i^0\in Q_i$ 是初始状态
- $f_i: Q_i\to A_i$ 是输出函数
- $\tau_i: Q_i\times A_j\to Q_i$(这里 $j\neq i$)是转移函数。

这个定义不同于上一章所给定的(第8.4节)地方在于，参与人的转移函数描述了状态如何随着别的参与人的行为而改变，而不是随着战略博弈的一个结果(即行为二元组)而改变。如在上一章所定义的那样，一台机器对应于扩展博弈中战略的概念，它要求对于每一段历史(包括那些被战略本身所排除的历史)参与人的行动都要被确定。如一般所理解的那样，这里我们想希望一台机器对应于一个行动计划，且因此仅将别的参与人的行动作为一个输入放进参与人的转移函数。

每个机器二元组 (M_1, M_2) 导致了 G 中的一个结果序列 $(a^t(M_1, M_2))_{t=1}^{\infty}$ 和状态二元组的一个序列 $(q^t(M_1, M_2))_{t=1}^{\infty}$，其定义如下：对 $i=1,2$ 和 $t\geqslant 1$ 我们有

- $q_i^1(M_1, M_2)=q_i^0$
- $a_i^t(M_1, M_2)=f_i(q_i^t(M_1, M_2))$
- $q_i^{t+1}(M_1, M_2)=\tau_i(q_i^t)(M_1, M_2), a_j^t(M_1, M_2))$(这里 $j\neq i$)。

我们限制每个参与人只能选择一台有有限个状态的机器，对参与人 i 用 $\mathcal{M}_i$ 表示所有这种机器的集合。因此机器博弈是一种两人战略博弈，在其中每个参与人 i 的行动集合是 $\mathcal{M}_i$。为了完成该博弈的描述我们需要描述参与人的偏好，如果我们假定每个参与人仅关心他重复博弈中的支付 $\mathcal{U}_i(M_1, M_2)=(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}u_i(a^t(M_1, M_2))$，那么我们获得像纳什无

165

名氏定理(命题 145.2)一样的结论,因为在该结论的证明中所使用的触发战略能被有限台机器执行。如果另一方面每个参与人既关心他在重复博弈中的支付,又关心他战略的复杂性,那么如我们将要看到的那样,我们获得非常不同于无名氏定理的结论。

定义机器的复杂性有很多方法。我们采用一种朴素的方法:机器 $M=\langle Q, q^0, f, \tau\rangle$ 的复杂性 $c(M)$ 是状态的个数(即:Q 的基数性(cardinality)。我们的分析对于我们使用的复杂性测度是敏感的。我们视此测度为关于战略情形的一条附加信息,它应该反映参与人在执行战略中相关的困境。从这个角度看,模型对复杂性测度的敏感性是值得要的,在不同环境中不同的测度可能是恰当的。

在下列定义中我们假设,在机器博弈中每个参与人的偏好与他在重复博弈中的支付正相关且与其机器的复杂性负相关。

▶定义 165.1 $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ 的用 δ 贴现的无限次重复博弈的一个**机器博弈**(machine game)是一战略博弈 $\langle\{1,2\},(\mathcal{M}_i),(\succsim_i)\rangle$,其中对每个参与人 i

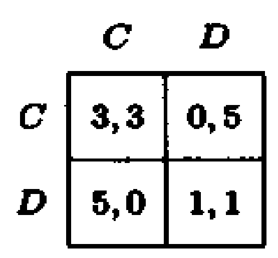
- $\mathcal{M}_i$ 是在无限次重复博弈中所有参与人 i 的有限机器的集合
- $\succsim_i$ 是一偏好次序,它在参与人 i 在重复博弈中的支付上是递增的,而在他的机器复杂性上是递减的:只要 $\mathcal{U}_i(M_1, M_2) > \mathcal{U}_i(M'_1, M'_2)$ 且 $c(M_i) = c(M_i')$ 或者只要 $\mathcal{U}_i(M_1, M_2) = \mathcal{U}_i(M_1', M_2')$ 且 $c(M_i) < c(M_i')$ 就有 $(M_1, M_2) \succ_i (M_1', M_2')$。

一种特殊的情形是每个参与人的偏好是可加的:$\succsim_i$ 由 $\mathcal{U}_i(M_1, M_2) - \gamma c(M_i)$(对于某个 $\gamma>0$)所代表,在此情形中 γ 可被解释为机器的每一状态的成本。另一种特殊情形是参与人的偏好是**字典式的**(lexicographic):每个参与人先关心在重复博弈中他的支付,其次才关心他的机器复杂性。这种情形特别有趣,因为字典式的偏好接近于在标准的不考虑复杂性的重复博弈模型中的偏好,那是个机器模型的原始模型。

166

◇例 166.1 假定博弈 G 是囚徒困境,支付在图 166.1 给出。考虑执行冷酷战略的两状态机器 M(见图 166.2)。如果参与人的共同贴现因子 δ 足够大,那么在 G 的用 δ 贴现的重复博弈中该机器是对它自己的一个最优反应。即使通过应用一台更复杂的机器,参与人 1 在重复博弈中也不能获得一个更高的支付。不过,当给定参与人 2 应用 M 没有一台参与人 1 的机器比 M 在重复博弈中获得更高的支付,那么就有一台参与人 1 的获得同一

支付且更不复杂的机器:即在其中有一 C 被选取的状态。状态 D 被设计用来允许参与人威胁他的对手,但在均衡中这个威胁是冗余的,因为每个参与人经常选 C。因此每个参与人造访状态 D 而不影响结果,所以 (M, M) 不是机器博弈的一个纳什均衡。



	C	D
C	3,3	0,5
D	5,0	1,1

图 166.1 囚徒困境

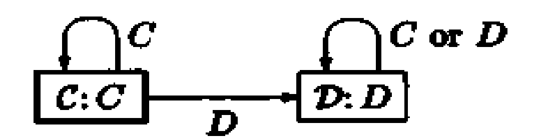


图 166.2 例 166.1 中的机器 M(一台完成重复囚徒困境博弈冷酷战略的机器)

◇例 166.2 对囚徒困境(如在前一个例子中)令 M 为图 167.1 中的机器。这台机器产生的行为可被解释为以展示惩罚的能力开始。在此展示之后参与人开始一个合作阶段,在其中他进行 C 且威胁通过移回到初始状态去惩罚偏离者。如果两个参与人都使用机器 M,那么在重复博弈中的支付序列是(1,1,1)及随后一无限三维序列。 167

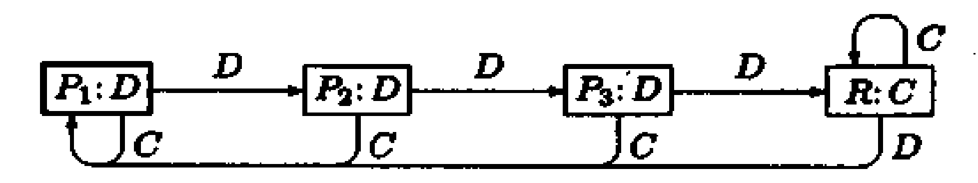


图 167.1 例 166.2 中的机器 M

我们断言如果参与人的共同贴现因子 δ 足够大,那么在参与人的偏好不给复杂性太多权重的情况下,(M, M) 是机器博弈的一纳什均衡(就好像这样的情形,即他们的偏好是具有较小复杂性成本的字典式的或可加的)。证明如下,为了增加在重复博弈中他的支付,当他对手的机器在状态 R 时参与人必须在最少的次数里选 D。任一这种 D 的选择导致别的机器在至少三个时期里选 D,所以当 δ 足够靠近 1 时,参与人通过这样的一个行动无所收获(即对足够接近 1 的 δ 有 $5+\delta+\delta^2+\delta^3<3+3\delta+3\delta^2+3\delta^3$)。因此

对足够大的 δ，一个参与人通过无论多复杂的机器都不能提高他在重复博弈中的支付。

我们现在证明参与人通过使用一个更简单的机器不能获得同在重复博弈中一样的支付。当别的参与人的机器在状态 R 时，为了获得同样的支付他必须选择 C 至少一次。为了这样做他的机器必须有至少四个状态。为说明之，考虑第一期，比如说是 t，在其中 $f_i(q_i^t)=C$ 且 $q_j^t=R$。我们必须有 $f_i(q_i^{t-3})=f_i(q_i^{t-2})=f_i(q_i^{t-1})=D$ 且因此特别地有 $q_i^t\neq q_i^{t-1}$。进一步而言，当 $\tau_i(q_i^{t-1},D)=q_i^t$，因为 $\tau_i(q_i^{t-2},D)=q_i^{t-1}$，所以 $q_i^{t-2}\neq q_i^{t-1}$。类似地 $q_i^{t-3}\neq q_i^{t-2}$ 且 $q_i^{t-3}\neq q_i^{t-1}$。

在一个机器博弈中参与人不得不解决这样一个问题，即他要平衡获得一个高支付和应用一种简单机器的欲望。在某种意义上说，这个问题比在重复博弈中寻找一个最优战略更复杂，因为参与人必须考虑他的行为准则的复杂性；我们对参与人解决此问题的能力不加任何约束。

168 9.3 机器博弈均衡的结构

我们现在描述机器博弈纳什均衡的结构。首先对我们所作的关于例166.1的评述一般化，当 M_1 和 M_2 运行时，如果某个参与人 i 的机器 M_i 有一未被使用的状态，那么 (M_1,M_2) 就不是一个纳什均衡，因为该状态可被删除而不影响结果。并且参与人 i 偏好状态被删除的机器。

■引理 168.1　如果 (M_1^*,M_2^*) 是机器博弈的一个纳什均衡，那么对机器 M_i^* 的任一状态 q_i 存在一个时期 t 使得 $q_i^t(M_1^*,M_2^*)=q_i$。

我们下一个结论表明了在一纳什均衡中每台机器都有相同的状态数，并且机器博弈的任一纳什均衡都对应于重复博弈的一个纳什均衡。

■引理 168.2　如果 (M_1^*,M_2^*) 是机器博弈的一个纳什均衡，那么

• $c(M_1^*)=c(M_2^*)$

• 在重复博弈中与 (M_1^*,M_2^*) 相关的战略二元组是重复博弈的一个纳什均衡。

证明 对在重复博弈中参与人 j 的任一战略 s_j 和参与人 i 的任一机器 M_i，用 $\mathcal{U}_j(M_i, s_j)$ 表示当参与人 j 使用 s_j 和参与人 i 使用与 M_i 相对应的战略时，参与人 j 在重复博弈中的支付。因为 M_1^* 是有限的，参与人 j 寻找一个对重复博弈中的机器 M_1^* 的最优反应的问题 $\max_{s_j}\mathcal{U}_j(M_i^*, s_j)$（忽略复杂性）有一个解（参看 Derman(1970, p.23 定理 1)。令 $M_i^* = \langle Q_i, q_i^0, f_i, \tau_i\rangle$ 且对每个 $q \in Q_i$ 令 $\mathcal{V}_j(q) = \max_{s_j}\mathcal{U}_j(M_i^*(q), s_j)$，这里 $M_i^*(q)$ 与 M_i^* 不同之处仅在于初始状态是 q 的机器。对每个 $q \in Q_i$ 令 $A_j(q)$ 为下列问题的解集

$$\max_{a_j \in A_j}\{u_j(f_i(q), a_j) + \delta\mathcal{V}_j(\tau_i(q, a_j))\}.$$

那么在重复博弈中参与人 j 的一个战略是对与 M_1^* 相对应的战略的一个最优反应，当且仅当它所采取的行动是当参与人 i 的机器在状态 q 中时 $A_j(q)$ 的一个元素。特别地，对每个 $q \in Q_i$ 选择 $a_j^*(q) \in A_j(q)$，存在一个由下列机器所执行的最优反应，该机器有 $c(M_i^*)$ 个状态。

- 状态集合是 Q_i。
- 初始状态是 q_i^0。
- 输出函数 f_j 由 $f_j(q) = a_j^*(q)$ 定义。
- 转移函数 τ_j 定义为对所有 $x \in A_i$，$\tau_j(q, x) = \tau_i(q, f_j(q))$。

因为 (M_1^*, M_2^*) 是机器博弈的一个纳什均衡，从而有 $c(M_j^*) \leqslant c(M_i^*)$，且因此有 $c(M_1^*) = c(M_2^*)$。进一步而言，因为参与人 j 能应用一台具有 $c(M_i^*)$ 个状态的机器去获取一个在重复博弈中等价于 $\max_{s_j}\mathcal{U}_j(M_i^*, s_j)$ 的支付，从而由 (M_1^*, M_2^*) 所执行的战略二元组是重复博弈的一个纳什均衡。 □

169

? 练习 169.1 试给出一个三人博弈的例子，对于它相关的机器博弈有一纳什均衡，在均衡中参与人机器里的状态数是不一样的。

我们现在派生一个对机器博弈的纳什均衡集合有较强涵义的结论。为了获得结论的某些直观感受，考虑对于如图 169.1 所示的无限次重复囚徒困境博弈的机器二元组。这个机器二元组产生这样一条路径：初始具有结果为 (D, D) 的 $k \geqslant 2$ 个时期（参与人显示他们的威胁），在其之后结果为 (C, C)、(C, C)、(C, D) 和 (D, C) 的长度为 4 的循环无限次重复。任何一个参与人从循环中规定的行动的偏离都会导致他的对手的机器进入初始状

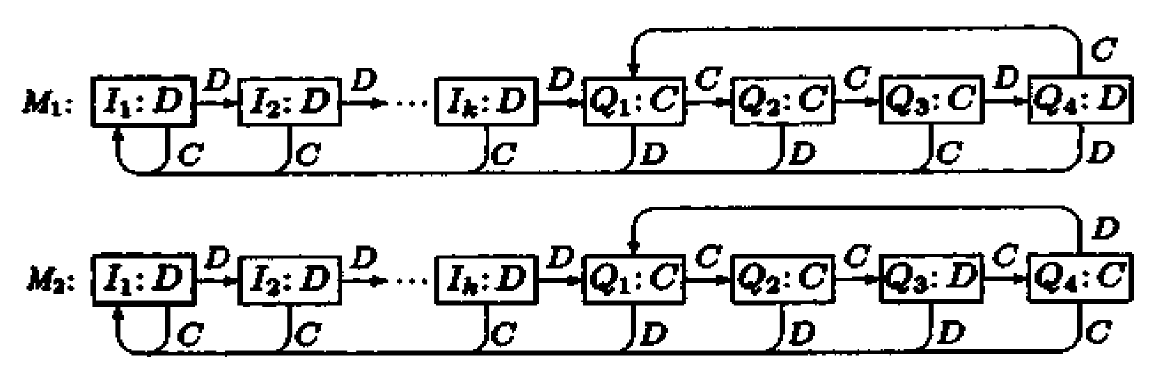


图 169.1 对无限重复囚徒困境博弈参与人 1 的机器 M_1 和参与人 2 的机器 M_2，二元组(M_1, M_2)产生了一条(D, D)发生 k 期且随后是序列(C, C)、(C, C)、(C, D)、(D, C)重复无限次的路径

态并在 k 个时期惩罚偏离者。正如你可检测一样，机器二元组当贴现因子 δ 足够接受 1 时是重复博弈的一个纳什均衡。不过它不是机器博弈的一个均衡。为说明之，考虑 M_1，在 Q_1, Q_2, Q_3 这三个状态的每一个参与人 1 采取同一行动；她应用仅有三个状态知道什么时候选行动 D 这一事实。不过，她可以采取如下方法观察参与人 2 的行动来获得这一信息。假定她采用机器 M_1'，在其中三个状态 Q_1，Q_2 和 Q_3 均被惟一一个状态 Q 所代替，在状态 Q 中她选 C，只要参与人 2 选 C 则状态保持在 Q，若参与人 2 选 D 则状态移至 Q_4，且若参与人 2 选 D 则从状态 I_k 转移到 Q，那么(M_1', M_2)同(M_1, M_2)一样产生相同的囚徒困境结果序列；因此在机器博弈中参与人 1 可以有利地偏离至 M_1'，因为它有比 M_1 更少的状态。

注意当参与人 2 的机器在 Q_1 或 Q_2 中时 M_1'并不控制参与人 2 的行动：如果参与人 2 在这些状态的某一个中选 D，那么 M_1'不是移到状态 I_1 而是移到 Q_4。如果参与人 1 使用机器 M_1'，那么参与人 2 可通过在状态 Q_3 选择 C 来利用这个特征。

该情形类似于下列的情形：一个伞兵在数到 100 后必须跳伞，而另一个参与人在数到 101 后必须跳伞。如果第二个伞兵数数，则他就可控制害怕跳伞的第一个伞兵。不过，在飞机紧张的环境中数数是有成本的，且第二个参与人可以简单地通过观察他的朋友且在她之后立即跳伞来避免数数的负担。但是，如果第二个伞兵不数数则第一个伞兵可利用这种控制的缺点并且不跳伞。

总而言之我们可以证明：如果一个纳什均衡机器二元组产生某个参与人在两个不同时期采取同一行动的结果，那么另一个参与人也在这两个时期采取同样的行动（与我们已讨论的例子中在时期 $k+2$ 和 $k+3$ 参与人的行动相矛盾）。

■引理 170.1 如果(M_1^*, M_2^*)是机器博弈的一纳什均衡，那么在由M_1^*和M_2^*所规定的参与人1与参与人2的行动之间存在着一个一一对应；如果对某个$t \neq s$有$a_i^t(M_1^*, M_2^*) = a_i^s(M_1^*, M_2^*)$，那么$a_j^t(M_1^*, M_2^*) = a_j^s(M_1^*, M_2^*)$。

证明 令$M_i^* = \langle Q_i, q_i^0, f_i, \tau_i \rangle$且对每个$q_i \in Q_i$定义与在引理168.2的证明中一样的$A_j(q_i)$。由引理168.2的第二部分机器$M_j^*$执行重复博弈中的一个战略，它是问题$\max_{s_j} \mathcal{U}_j(M_i^*, s_j)$的一个解。因而对所有$t$有$f_j(q_i^t(M_1^*, M_2^*) \in A_j(q_i^t(M_1^*, M_2^*))$。由此若对两个时期$t$和$s$，在其中$a_i^t(M_1^*, M_2^*) \neq a_i^s(M_1^*, M_2^*)$且$a_j^t(M_1^*, M_2^*) = a_j^s(M_1^*, M_2^*)$，那么存在参与人$j$的一个最优策略$a_j'$使得$a_j'(q_i^t(M_1^*, M_2^*)) = a_j'(q_i^s(M_1^*, M_2^*))$。也就是，只要参与人$i$的状态是$q_i^t(M_1^*, M_2^*)$或$q_i^s(M_1^*, M_2^*)$则参与人$j$采用同一行动。下列机器完成策略$a_j'$且有$c(M_i^*)-1$个状态，这与引理168.2的第一部分相矛盾。

171

- 状态集合是$Q_i \setminus \{q_i^s\}$。
- 初始状态当$q_i^s \neq q_i^0$时为q_i^0，否则为q_i^t。
- 输出函数由$f_j(q) = a_j'(q)$确定。
- 转移函数定义如下：如果$\tau_i(q, f_j(q)) = q_i^s$，那么对所有$x \in A_i$有$\tau_i(q, x) = q_i^t$，否则对所有$x \in A_i$若$q \neq q_i^t$且

$$\tau_j(q_i^t, a_i) = \begin{cases} \tau_i(q_i^s, f_i(q_i^s)) & \text{若 } a_i = a_i^s(M_1^*, M_2^*) \\ \tau_i(q_i^t, f_j(q_i^t)) & \text{否则} \end{cases}$$

有$\tau_j(q, x) = \tau_i(q, f_j(q))$。这就完成了证明。 □

该结论对在任一每个参与人有两个行动的博弈中的均衡结果有一明显的内涵。例如，如果在重复囚徒困境中两个结果在均衡路径上出现，那么这对结果是$\{(C, C), (D, D)\}$或$\{(C, D), (D, C)\}$。

我们现在转向探讨均衡机器的结构。因为每个参与人的机器是有限的，所以有一个最小数t'使得对某个$t > t'$我们有$q_i^t = q_i^{t'}$；令t^*是这种t的最小值。在时期t'开始的状态二元组序列包含长度为$t^* - t'$的循环。我们称这个阶段为**循环阶段**(cycling phase)。在时期t'前的阶段为**导入阶段**(introductory phase)。

我们现在证明，一个参与人在循环和导入阶段所应用的状态集合是不相交的。进一步而言，在导入阶段每个状态只被进去一次，在循环阶段所应

用的参与人的每个状态在每一循环只出现一次。因此均衡中在机器里的参与人 1 和 2 的状态之间存在着一个一一对应，这一事实可被解释为在每个时期每台机器“知道”别的机器所处的状态。

■命题 171.1　如果(M_1^*, M_2^*)是一个机器博弈的均衡，那么存在一个时期 t^* 和一整数 $l < t^*$ 使得对 $i = 1, 2$，序列$(q_i^t(M_1^*, M_2^*))_{t=1}^{t^*-1}$中的状态是不一样的，且对 $t \geq t^*$ 有 $q_i^t(M_1^*, M_2^*) = q_i^{t-l}(M_1^*, M_2^*)$。

172　**证明**　令 t^* 为某一机器的某一状态第二次出现的第一个时期。即，令 t^* 为有一参与人 i 和一时期 $t_i < t^*$ 使得 $q_i^{t^*} = q_i^{t_i}$ 的最小时期。我们有 $a_i^{t^*} = a_i^{t_i}$ 且由引理 170.1 有 $a_j^{t^*} = a_j^{t_i}$，从而对所有 $k \geq 0$ 我们有 $q_i^{t^*+k} = q_i^{t_i+k}$，所以用引理 168.1，$c(M_i^*) = t^* - 1$。通过参与人 i 的选择所有 M_j^* 的状态直到时间 $t^* - 1$ 都是不一样的，所以引理 168.2 的第一部分蕴含着存在 $t_j < t^*$ 使得 $q_j^{t_j} = q_j^{t^*}$。还需证明 $t_j = t_i$。假设其不成立，比如，$t_j > t_i$，那么参与人 j 使用一台这样的机器可获得相同的结果路径，在该机器里 $q_j^{t_j}$ 被从 $q_j^{t_j-1}$ 至 $q_j^{t^*}$ 的一个转移排除，从而省略 $q_j^{t_j}$。但与 M_j^* 的最优性相矛盾。　□

一个机器博弈是一战略博弈，所以分析没有考虑由于博弈精炼均衡的概念所模化的类型。为了加进这些考虑，我们可以修改解的概念并且要求在重复博弈中的每段历史之后机器二元组为机器博弈的一均衡。这样一个修改蕴含了机器的运行没有任何导入阶段：一旦循环阶段被达到，一个在进行过程中可以改变他的机器的参与人想省略任何导入状态。从而如练习 173.2 所阐述的那样，均衡路径集合被这个解的修改严格限制了。

9.4　字典式偏好的情形

上部分的结论比较有意义地约束了机器博弈的均衡集合。为了进一步约束均衡集合，我们需要在每个参与人的偏好关系中确定重复博弈中他的支付与他的机器复杂性之间的替代关系。本部分我们假设参与人的偏好是字典式的(复杂性是第二考虑，在重复博弈中的支付之后)；我们将注意力限

于成分博弈是囚徒困境(支付见图 166.1)的情形。

如我们上面注意到的,引理 170.1 蕴含了在均衡路径上所发生的结果集合是{(C,C),(D,D)}的一个子集或{(C,D),(D,C)}的一个子集。先考虑前一类型的均衡,令 n_C 和 n_D 为两个非负整数,它们中至少有一为正的,那么对足够接近于 1 的 δ 可证明有一长度为 n_C+n_D 的循环,在其中(C,C)出现 n_C 次且(D,D)出现 n_D 次,对于 $n_C=n_D=1$ 的情形,有一每个参与人用图 173.1 中机器 M 的对称均衡。(对于不是字典式的偏好二元组(M,M)只有在参与人的偏好对复杂性不加太大权重的情形下才是一个均衡。) 173

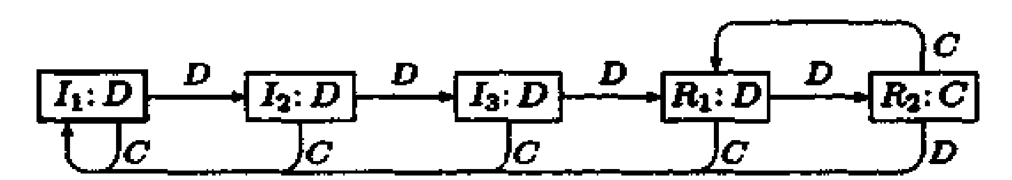


图 173.1 每个参与人在无限次重复囚徒困境博弈中的机器 M

? 练习 173.1

a. 试证明若 δ 足够接近 1 则机器二元组(M,M)是机器博弈的一个纳什均衡。

b. 试证明若机器 M 被这样修改:在 R_1 进行 C,在 R_2 进行 D,并且在 R_1 和 R_2 中的转移被反过来,那么新的机器二元组不是机器博弈的一纳什均衡。

在这些均衡中导入阶段是非空的,并且对任一支持(C,C)为一结果路径的均衡也是如此。

? 练习 173.2 试证明每一个以(C,C)为结果的均衡有一导入阶段。

现在考虑在均衡路径上的每个结果是(C,D)或(D,C)的均衡。一些这种均衡是循环的,没有任何导入阶段。精确点来说,对所有满足 $5n_i/(n_1+n_2)>1(i=1,2)$的正整数 n_1 和 n_2 存在 δ 足够大使得有一机器博弈的均衡,在其中循环包括 n_1 个(D,C)的进行和随后 n_2 个(C,D)的进行且无任何导入阶段。(这个在 n_1 和 n_2 上的条件保证了每个参与人的平均支付超过了他的最小最大支付 1。)

对于 $n_1=n_2=1$ 情形的一个均衡如图 174.1 所示。这个均衡的一个解释是参与人轮流对对方慷慨。人们可以认为(C,D)是一个参与人 1 给参与人 2 一件礼物的事件且(D,C)是一个参与人 2 给参与人 1 一件礼物

的事件。在均衡中一个参与人若他的对手不接受他的礼物则他并不介意174 (即当他可能已选 D 且已接受礼物时选 C)，但他坚持他的对手在他期望得到礼物之时给他礼物(进行 C)。如果他收不到礼物，那么他不会移到他是慷慨的那一状态。

在我们的全部分析中成分博弈是战略博弈。人们也可考察成分博弈是扩展博弈的情形。当重复博弈纳什均衡的分析不受影响(尽管子博弈精炼均衡的集合可能有些不一样)，机器博弈纳什均衡的分析在此情形中如下列练习所示也很不一样。

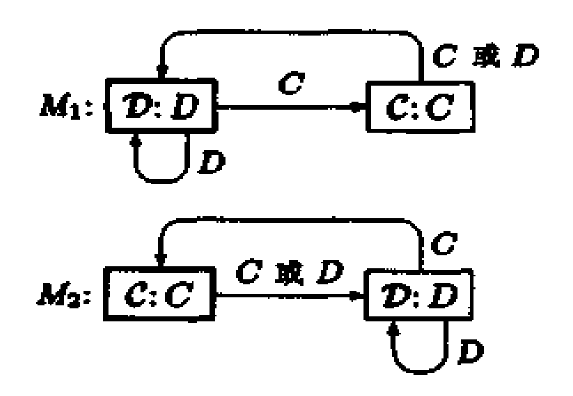


图 174.1 对于无限次重复囚徒困境博弈的参与人 1 的机器 M_1 和参与人 2 的机器 M_2 对足够大的 δ 二元组(M_1, M_2)是机器博弈的一个均衡；它产生包含循环$((D,C),(C,D))$重复的路径

	A	B
A	3,1	1,3
B	2,0	2,0

图 174.2 练习 174.1 中重复博弈的成分博弈

⑦ 练习 174.1 考虑成分博弈由图 174.2 所给的无限次重复博弈。

a. 试证明与机器博弈纳什均衡相关的路径集合只包含结果(A,A)和(B,B)。

b. 试证明如果在机器博弈中参与人的偏好是字典式的，那么只包含结果(A,A)和(B,B)的对 δ 足够大的每一个有限序列是与某一机器博弈纳什均衡相关的路径的循环阶段。

175 c. 注意博弈是完全信息扩展博弈的战略形式。假定参与人进行的成分博弈是这个扩展博弈的无限次重复博弈，并在每轮结束时了解到所发生

的终点历史，试证明这个重复博弈的机器博弈有惟一纳什均衡，其中在每个时期支付组合是(2,0)。(提示：当参与人1选 B 时她不能控制，若她选 A 则参与人2计划选 A 还是选 B。)

[注解]

本章基于 Rubinstein(1986)和 Abreu and Rubinstein(1988)。证明的思路，特别是引理 170.1 的证明，是 Piccione(1992)对 Abreu 和 Rubinstein (1988)证明的一个修改。练习 174.1 基于 Piccione 和 Rubinstein(1993)。

在相关的一系列文献的思路中，一个参与人可利用的机器复杂性被认为是非常广的。这些研究的主要目的是证明不同于(D,D)重复的均衡结果可在有限次重复囚徒困境博弈中被支持；例子可参看 Neyman(1985)和 Zemel(1989)。

177

第 10 章

实 施 理 论

本章我们研究与上一章所考虑的问题相反的问题:不是固定一个博弈从而通过给定某个解的集合来寻找结果集合;而是要固定一个结果集合来寻找一个产生那个均衡结果集合的博弈。

10.1 介绍

博弈理论中的标准过程是系统表达一个反映了某一情形的模型并且去考察与某一解的概念相一致的结果集合。如果我们固定了博弈的结构并且改变参与人的偏好,那么解的概念将导致从偏好组合到结果集合的一个对应变化。

本书中我们的一般方法是博弈不必是某一现存物理规则的描述:大多数战略情形缺乏一个清晰的结论,甚至当这一结构存在时,参与人对情形的领悟也不必与那个情形的"客观"描述相一致。相反,本章中计划者被假设去设置相互作用规则,当个人面对这些规则时,他们被假设为要精确地遵从这些规则。计划者可以设计博弈的结构但是不能控制参与人的偏好或行动。开始时她描述她希望与每个可能的偏好组合相联系的结果,然后寻找一个"执行"这一联系的博弈。一旦找到这样的博弈,她就可以通过让个人进行博弈来实现她的目标,当然同时要假设他的行动与解的概念一致。

隐含于这个执行问题解释的一个假设是计划者可以强迫个人去进行博弈,但不能直接地强加实施想要的结果,可能是因为她缺乏一些有关情形的参数的信息。这些信息对所有参与人是已知的,但她要得到的话,要么成本太高,要么根本不可能。

178

为了阐释执行问题的特征,考虑这样一个计划者,希望把某个物体分配

给两人中的某位。假设她想把物体分配给对它估价最高的个人，但是并不知道这个人是谁，那么她的问题是设计一个具有下列性质的博弈：对每个可能的估价二元组，根据某个解的概念的结果是物体分配给那个对它估价最高的人。这是否可行要依赖于计划者能强加给个人的结果。例如，她仅被允许对个人罚款。

像在别的各章一样，我们集中精力于理论的概念方面并且仅提供一个主要思想的样本。我们将注意力仅限于个人完全知道情形参数的执行问题；我们不会去碰那些考虑了非对称信息情形的大文献。

10.2 实施问题

令 N 为个人的一个集合，C 为可行结果的一个集合，且$\mathcal{P}$ 为关于 C 的偏好组合的一个集合。我们用 $\succsim_i$ 表示个人 i 的偏好关系，并且有时简单地用$\succsim$表示偏好组合$(\succsim_i)_{i\in N}$。一个**选择规则**(choice rule)是一个给$\mathcal{P}$ 中的每个组合赋 C 的一子集的函数。我们称单值的选择规则为**选择函数**(choice function)。计划者的目标是设计一个博弈形式，它的结果对$\mathcal{P}$ 中的每个偏好组合$\succsim$都与 $f(\succsim)$一致，这里 f 是要选择规则或选择函数。如果 f 不是单值的，那么计划者会担心 $f(\succsim)$中的每个结果都是可能的。例如，在前一部分所讲的例子中，计划者可能希望把物体分给对它估价最高的个人，但如果他们的估价是一样的，则在个人间就不能加以区别。在一个更一般的问题中，计划者可能希望执行将每个偏好组合与有效结果集合相联系的选择规则。

计划者控制博弈规则，其可被系统表达为一个博弈形式。**具有 C 中结果的战略博弈形式**(a strategic game form with consequences in C)是一个三元组，$\langle N,(A_i),g\rangle$这里对每个 $i\in N$，A_i 是参与人i 可行的行动集合，$g:A\to C$(这里 $A=\times_{i\in N}A_i$)是一个将每个行动组合与一个结果相联系的结果函数。一个战略博弈形式和一个偏好组合$(\succsim_i)$导致的一个战略博弈$\langle N,(A_i),(\succsim'_i)\rangle$，这里$\succsim'_i$ 的定义如下：$a\succsim'_i b$ 当且仅当对每个 $i\in N$ 有 $g(a)\succsim_i g(b)$。**具有 C 中结果的(完全信息)扩展博弈形式**(an extensive game form (with perfect information) with consequences in C)是一四元组$\langle N,H,P,g\rangle$，这里 H 是一历史集合，$P:H\setminus Z\to N$ 是一参与人函数，$g:Z\to C$ 是一结果函数

179

($Z \subseteq H$ 为终点历史集合)。(参看定义89.1和随后的扩展博弈形式的定义)。一个扩展博弈形式和一个偏好组合导致了一个扩展博弈。

计划者在一个含有下列成分的**环境**中操作：

- 参与人的一个有限集合 N, $|N| \geqslant 2$,
- 一个结果集合 C
- 一个关于 C 的偏好组合集合$\mathcal{P}$
- 一个具有 C 中结果的(要么战略,要么扩展博弈形式)集合$\mathcal{G}$ 。

当计划者设计一个博弈去实施她的目标时,她必须考虑个人将如何进行任一可能的博弈。对于环境$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G} \rangle$的解的概念是一个定义域为$\mathcal{G} \times \mathcal{P}$ 的集值函数S 。如果$\mathcal{G}$ 中的元素是战略博弈形式,那么S 取行动组合集合的值,当$\mathcal{G}$ 的元素是扩展博弈形式时,那么S 取终点历史集合中的值。

下列定义是计划者问题的一个系统表达。

▶定义 179.1　令$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G} \rangle$为一环境且令$S$ 为一解的概念。具有结果函数$\mathcal{G}$ 的战略形式 $G \in \mathcal{G}$,如果对每个偏好组合 $\succsim \in \mathcal{P}$ 我们有$\mathcal{G}(S(G, \succsim)) = f(\succsim)$,那么 G 被称为S -**实施**(S -implement)选择规则 $f: \mathcal{P} \to C$。在此情形中,我们说选择规则 f 是在$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G} \rangle$中$S$ -**可实施的**(S -implementable)。

在别的应用战略博弈形式的实施概念中,每个参与人的行动集合要求为可能的偏好组合集合(每个参与人必须对每个别的参与人报告有一偏好关系),并且报告真的偏好组合这一行动要求与解的概念相一致。这样的一个概念如下。

▶定义 179.2　令$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G} \rangle$为一环境,其$\mathcal{G}$ 为一战略博弈形式集合,对于它每个参与人 i 的行动集合是一个偏好组合集合$\mathcal{P}$ 。并且令S 为一解的概念。战略博弈形式 $G = \langle N, (A_i), g \rangle \in \mathcal{G}$ **真正地**S -**实施**(truthfully S -implements)选择规则 $f: \mathcal{P} \to C$,如果对每个偏组合 $\succsim \in \mathcal{P}$ 我们有

180

- $a^* \in S(G, \succsim)$,这里对每个 $i \in N$ 有 $a_i^* = \succsim$(每一个报告真的偏好组合的参与人是博弈的一个解)
- $g(a^*) \in f(\succsim)$(如果每个参与人报告真的偏好组合则结果是 $f(\succsim)$的一个元素)。

在此情形中我们说选择规则 f 在$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G} \rangle$中是**真正地**$S$ -**可实施的**(truthfully S -implementable)。

这个执行的概念在三个方面不同于先前定义的概念。首先,并且是最重要的,它要求每个参与人的行动集合为偏好组合的集合,且"真实地告知"是可能提出的每个博弈的一个解。其次,它允许(非真实的告知)博弈的解产生与选择规则不一致的结果。第三,它允许有一偏好组合,对于它并非每个由选择规则确定的结果都对应于博弈的一个解。

我们的讨论是按照所考虑的博弈形式的集合和所使用的解的概念来组织的。我们以战略博弈形式和占优战略均衡解开始;我们接着考虑战略博弈形式和纳什均衡解;最后考虑扩展博弈形式和子博弈精炼均衡解。

我们建立两类结论,一个是消极的,另一个是积极的。消极的结论给出仅有退化的选择规则可被实施的条件。积极的结论给出在一个很大集合中的每个规则都可被(至少近似地)实施的条件。后一种类型的结论很像第8章中"无名氏定理。"像无名氏定理一样他们的主要兴趣不在于"任何事情都是可能的"这一事实;而是,我们用于证明结论的机制结构是考察者最感兴趣的。在给定我们对于这些机制推理的洞察力的条件下,这些结构的某些性质有时符合我们观察到的机制。

10.3 占优战略中的实施

在本节我们假设计划者被限于使用战略博弈形式。我们假设在想要避免战略复杂性的同时她希望通过设计博弈来达到她的目标,所以她希望实施的结果是与占优战略均衡(DSE)解的概念相一致的,定义如下。

▶定义 181.1 **战略博弈$\langle N,(A_i),(\succsim_i)\rangle$的一个占优战略均衡**(a dominant strategy equilibrium of a strategic game)是一个行动组合 $a^*\in A$。它满足对每个参与人 $i\in N$,对所有的 $a\in A$,我们有:$(a_{-i},a_i^*)\succsim_i(a_{-i},a_i)$。因此在占优战略均衡中每个参与人的行动都是对别的参与人的每个行动集合的最优反应,而不像在纳什均衡中(定义 14.1)仅仅是别的参与人均衡行为的最优反应。(注意这一事实:a^*是一占优战略均衡并不意味着对任一参与人 i 行动 a_i^* 优于(即使是弱的)参与人 i 的所有其它行动:它可能是对每 $a_i\neq a_i^*$ 及所有 $a_{-i}\in A_{-i}$,我们有$(a_{-i},a_i^*)\sim_i(a_{-i},a_i)$。DSE—实施概念是强的,因为无论别的参与人做什么,一个占优战略都是最

181

优的。我们现在明白用 DSE-实施一个选择规则是很难的。

我们说选择规则 $f:\mathcal{P}\to C$ 是**独裁的**(dictatorial)如果有一个参与人 $j\in N$ 使得对任一偏好组合 $\succsim\in\mathcal{P}$ 和结果 $a\in f(\succsim)$,对所有 $b\in C$ 我们有 $a\succsim_j b$。下列称为 Gibbard-Satterthwaite 定理的结论是实施理论中的一个里程碑。

■**命题 181.2** 令 $\langle N,C,\mathcal{P},\mathcal{G}\rangle$ 为一环境,其中 C 包含至少三个元素,$\mathcal{P}$ 是所有可能的偏好组合的集合,且 $\mathcal{G}$ 是战略博弈形式的集合。令 $f:\mathcal{P}\to C$ 为一个 DSE-可实施的选择准则且满足条件

$$\text{对每个 } a\in C \text{ 存在} \succsim\in\mathcal{P} \text{ 使得 } f(\succsim)=\{a\}. \quad (181.3)$$

那么 f 是独裁的。

这个结论的证明使用下列结论。

■**引理 181.4** (DSE-实施的显示原理)(Revelation principle for DSE-implementation)令 $\langle N,C,\mathcal{P},\mathcal{G}\rangle$ 为一环境,其中 $\mathcal{G}$ 是战略博弈形式集合。如果选择准则 $f:\mathcal{P}\to C$ 是 DSE-可实施的那么

a. f 是真正地 DSE-可实施的

b. 存在一个战略博弈形式 $G^*=\langle N,(A_i),g^*\rangle\in\mathcal{G}$,其中 A_i 是所有偏好关系(而非组合)的集合使得对所有 $\succsim\in\mathcal{P}$ 行动组合 $\succsim$ 是战略博弈 $\langle G^*,\succsim\rangle$ 的一个占优战略均衡且 $g^*(\succsim)\in f(\succsim)$。

证明:令 $G=\langle N,(A_i),g\rangle$ 为一个 DSE-实施 f 的战略形式。我们先证明(b)。我们对任一参与人 j 占优行动集合仅依赖于 $\succsim_j$,所以我们可以定义 $a_j(\succsim_j)$ 为参与人 j 在任一博弈 $\langle G,(\succsim_{-j},\succsim_j)\rangle$ 中的一占优行动。由 $g^*(\succsim)=g((a_i(\succsim_i)))$(来确定 G^* 的结果函数 g^*。因为 G DSE-实施 f,所以我们有 $g^*(\succsim)\in f(\succsim)$。现在假设有一偏好组合 $\succsim$,对于它 $\succsim_i$ 不是参与人 j 在 G^* 中的一占优战略。那么有一偏好组合 $\succsim'$ 使得 $g^*(\succsim'_{-j},\succsim'_j)\succ_j g^*(\succsim'_{-j},\succsim_j)$。所以 $a_j(\succsim_j)$ 在 $\langle G,\succsim\rangle$ 中并不是对行动族 $(a_i(\succsim'_i))_{i\in N\setminus\{j\}}$ 的一个最优反应,这是一个矛盾。因此 $\succsim$ 是 $\langle G^*,\succsim\rangle$ 的一占优战略均衡。

182

立即可知 $\succsim$ 是每个参与人在博弈 $\langle G',\succsim\rangle$ 中的一个占优战略,其中每个参与人的行动集合是 $\mathcal{P}$ 且结果函数由 $g'((\succsim(i)))=g^*((\succsim_i(i)))$ 给定(这里 $\succsim(i)$ 对每个 $i\in N$ 是一偏好组合),所以 f 是真正地 DSE-可实施的,这样就证明了(a)。 □

从这个引理可知，如果一个选择准则不可能被真正地 DSE-实施那么它也不可能被 DSE-实施。因此举例来说，如果$\mathcal{P}$ 仅包含严格偏好关系，那么选择在参与人 1 的偏好中位列第二的结果的选择函数就不是 DSE-可实施的；如果它是，那么由引理对于参与人 1 来说 G^* 中的一个占优战略会去报告她的真实偏好关系，但实际上在 G^* 中对她来说报告一个“她最偏好的行动位列第二”的偏好关系更好。

注意到在引理中博弈 G^* 不必 DSE-实施选择准则，因为如我们较早所注意的那样，真正的 DSE-实施概念并不排除这样的可能性：存在非真正的占优战略组合，对于它结果不同于任一由选择准则所给定的结果。简言之，从引理 181.4 不能推知 DSE-实施等价于真正的 DSE-可实施。

? 练习 182.1　试证明如果偏好组合集合$\mathcal{P}$ 仅包含严格偏好，那么一个选择函数是真正地 DSE-可实施的，当且仅当它是 DSE-可实施的。

Gibbard-Satterthwaite 定理证明的主要部分是下列社会选择理论中结论的证明，我们省略之。[该结论的标准证明依赖阿罗不可能性定理(对它的一个证明可参看 Sen(1986)]

■引理 182.2　令 C 为一含至少三个元素的集合且令$\mathcal{P}$ 为所有可能的偏好组合的集合。如果选择函数 $f:\mathcal{P}\to C$ 满足(181.3)且对每个偏好组合 $\succsim\in\mathcal{P}$ 我们有：对每个偏好关系 $\succsim'_j$，

$$f(\succsim_{-j},\succsim_j)\succsim_j f(\succsim_{-j},\succsim'_j)\text{，那么 } f \text{ 是独裁的。}$$

引理 181.2 的证明。从引理 181.4 的证明可知，如果选择准则 f 比如说通过战略形式 G 是 DSE-可实施的，那么 f 的任一选择 g^*（即对所有 $\succsim\in\mathcal{P}$，$g^*(\succsim)\in f(\succsim)$）有这样的性质，即对每个偏好组合 $\succsim$ 我们有：对每个偏好关系 $\succsim'_j$，$g^*(\succsim_{-j},\succsim_j)\succsim_j g^*(\succsim_{-j},\succsim'_j)$，因为 f 满足(181.3)故 g^* 也满足。因此由引理 182.2 g^* 是独裁的，所以 f 也是独裁的。 □

183

? 练习 183.1　不使用 Gibbard-Satterthwaite 定理(181.2)，试解释为什么下列的选择函数在环境$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G}\rangle$ 中不是 DSE-可实施的，其中 C 包含至少三个元素，$\mathcal{P}$ 是所有可能的偏好组合集合，且$\mathcal{G}$ 是战略博弈形式集合：

$$f(\succsim)=\begin{cases}a & \text{若对所有 } i\in N \text{ 我们有：对所有 } b\neq a, a\succ_i b\\ a^* & \text{其它，}\end{cases}$$

这里 a^* 是 C 的任意元素。

Gibbard-Satterthwaite 定理(181.2)适用于$\mathcal{P}$ 为所有可能的偏好组合集合的环境$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G}\rangle$。有很多环境中$\mathcal{P}$ 不包含所有可能的偏好组合，对此我们可构造 DSE-实施非退化选择规则的博弈形式。最有名的这个博弈形式是由 Clarke(1971)和 Groves(1973)所研究的，它被设计用于这样的情形，即个人集合不得不决定是否追求某个有成本的联合目标，且若他们决定做的话那么如何分配成本。Clarke 和 Groves 让结果集合 C 包含所有二元组$(x,(m_i))$，这里根据目标是否被执行确定 $x=1$ 或 0，m_i 是参与人 i 的一个支付。他们加上这样的条件，即每个参与人 i 的关于 C 的偏好关系由形如$\theta_i x - m_i$(θ_i 为某一实数)的一个效用函数所表示；在此假设下我们能使偏好组合集合$\mathcal{P}$ 等同于实数组合集合$\mathbb{R}^N$。Clarke 和 Groves 构造博弈形式的目的是实施选择函数 $f:\mathbb{R}^N\to C$，其性质是目标被实施当且仅当 $\sum_{i\in N}\theta_i\geqslant\gamma$，这里 $\gamma\geqslant 0$ 是目标的成本。

并非所有这种选择函数都是 DSE-可实施的。下一命题和练习建立了这样一个选择函数 f，它真正地 DSE-可实施的当且仅当对每个 $j\in N$ 有一函数h_j，使得对所有 $\theta\in\mathbb{R}$ 有 $m_j(\theta)=x(\theta)(\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}\theta_i)+h_j(\theta_{-j})$，这里 $f(\theta)=(x(\theta), m(\theta))$。在用于执行 f 的战略博弈形式中，每个参与人 j 报告一个数a_j，其被解释为他对目标的一具体报价，目标被实施当且仅当这些报价和至少为 γ，由参与人j 所做的支付等于 $h_j(a_{-j})$(它与他的报价独立)加上当目标被完成时目标成本与由别的参与人所做的报价之和之间的差值。正式地，在这个战略博弈形式$\langle N,(A_i), g\rangle$中我们有 $A_i=\mathbb{R}$ 和对每个 $a\in A$，$g(a)=(x(a), m(a))$，这里

$$\begin{cases} x(a)=1 \text{ 当且仅当 } \sum_{i\in N}a_i\geqslant\gamma \\ m_j(a)=x(a)(\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}a_i)+h_j(a_{-j}),\text{对每个 } j\in N. \end{cases} \tag{184.1}$$

这样一种博弈形式被称为 Groves 机制。

■命题 184.2　令$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G}\rangle$为一环境，其中 $C=\{(x, m): x\in\{0,1\}$ 且 $m\in\mathbb{R}^N\}$，$\mathcal{P}$ 是组合$(\succsim_i)$的集合，在其中每个$\succsim_i$ 由形如 $\theta_i x-m_i$(对某个 $\theta_i\in\mathbb{R}$ 的一个效用函数表示，$\mathcal{G}$ 是战略博弈形式的集合；$\mathcal{P}$ 等同于$\mathbb{R}^N$。一个具有 $f(\theta)=(x(\theta), m(\theta))$的选择函数 $f:\mathbb{R}^N\to C$ 且满足

- $x(\theta)=1$ 当且仅当$\sum_{i\in N}\theta_i\geqslant\gamma$
- 对每个 $j\in N$ 有一函数h_j，使得对所有 $\theta\in\mathbb{R}^N$有 $m_j(\theta)=x(\theta)(\gamma-$

$\sum_{i\in N\setminus\{j\}}\theta_i)+h_j(\theta_{-j})$

该选择函数被(184.1)中所定义的 Groves 机制$\langle N,(A_i),g\rangle$真正地 DSE-可实施。

证明:令 $j\in N$ 且令 a_{-j} 为非 j 参与人的一任意行动向量。我们认为当非 j 的参与人选择 a_{-j},参与人 j 的支付当他选择 $a_j=\theta_j$ 时至少同当他选 A_j 中任何别的行动时一样高。有三种情形

- 如果 $x(a_{-j},\theta_j)=x(a_{-j},a'_j)$ 那么 $m_j(a_{-j},a'_j)=m_j(a_{-j},\theta_j)$ 且因此 $g(a_{-j},a'_j)=g(a_{-j},\theta_j)$。
- 如果 $x(a_{-j},\theta_j)=0$ 和 $x(a_{-j},a'_j)=1$ 那么 j 的支付在(a_{-j},θ_j)下是 $-m_j(a_{-j},\theta_j)=-h_j(a_{-j})$ 而他的支付在(a_{-j},a'_j)下是 $\theta_j-m_j(a_{-j},a'_j)=\theta_j-(\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}a_i)-h_j(a_{-j})<-h_j(a_{-j})$,因为 $x(a_{-j},\theta_j)=0$ 蕴含着 $\sum_{i\in N\setminus\{j\}}a_i+\theta_j<\gamma$。
- 如果 $x(a_{-j},\theta_j)=1$ 和 $x(a_{-j},a'_j)=0$,那么 j 的支付在(a_{-j},θ_j)下是 $\theta_j-m_j(a_{-j},\theta_j)=\theta_j-(\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}a_i)-h_j(a_{-j})$,而他的支付在$(a_{-j},a'_j)$下是 $-m_j(a_{-j},a'_j)=-h_j(a_{-j})\leqslant\theta_j-(\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}a_i)-h_j(a_{-j})$,因为 $x(a_{-j},\theta_j)=1$ 蕴含 $\sum_{i\in N\setminus\{j\}}a_i+\theta_j\geqslant\gamma$。

因此对参与人 j 来说选择 $a_j=\theta_j$ 是一占优行动。结果 $g(\theta)$ 等价于 $f(\theta)$,所以$\langle N,(A_i),g\rangle$真正地 DSE-实施 f。 □ 185

注意 Groves 机制(184.1)并非 Nash-实施一个满足命题条件的选择,函数 f:例如若 $\gamma=2$,$|N|=2$ 且对两个参与人 $\theta_i=1$,那么相关的博弈除了(1,1)外还有一个无效的均衡$(-2,-2)$。

? 练习 185.1 在一个像前面命题里的环境中,试证明如果一个选择函数 f 满足 $f(\theta)=(x(\theta),m(\theta))$ 和 $x(\theta)=1$,当且仅当 $\sum_{i\in N}\theta_i\geqslant\gamma$ 是真正地 DSE-可实施的,那么对每个 $j\in N$ 有一函数 h_j 使得对所有 $\theta\in\mathbb{R}^N$ 有 $m_j(\theta)=x(\theta)(\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}\theta_i)-h_j(\theta_{-j})$。[读者需要证明只要 $x(\theta_{-j},\theta_j)=1$ 和 $x(\theta_{-j},\theta'_j)=0$,那么 $m_j(\theta_{-j},\theta_j)-m_j(\theta_{-j},\theta'_j)=\gamma-\sum_{i\in N\setminus\{j\}}\theta_i$。]

10.4 纳什实施

我们现在转向这样的情形,如在第 10.3 节一样计划者使用战略博弈形

式并假设对任一她设计的博弈形式和任一偏好组合，博弈的结果可能是其纳什均衡中的任一个。

第一个结论是显示原理(也可参看引理 181.4)的一个变形。它证明了任一纳什-可实施的选择规则也是真正地纳什-可实施的：有一博弈形式，其中(ⅰ)每个参与人不得不报告一个偏好组合，(ⅱ)对任一偏好组合真实告知是一纳什均衡。该结论有两个目的。首先，它帮助确定纳什-可实施的选择规则的边界。其次，它证明了一个简单博弈可被用来达到这样一个计划者的目标，即他认为真正的纳什均衡是自然的且只要结果在由选择规则所给定的集合中就不关心这个结果。

■引理 185.2 (纳什实施显示原理)令$\langle N, C, \mathcal{P}, \mathcal{G}\rangle$为一$\mathcal{G}$是战略博弈形式集合的环境。如果一个选择规则是纳什-可实施的那么它是真正地纳什-可实施的。

证明：令$G=\langle N,(A_i),g\rangle$为一个纳什-实施选择规则$f:\mathcal{P}\rightarrow C$的博弈形式，并且对每个$\succsim\in\mathcal{P}$令$(a_i(\succsim))$为博弈$\langle G,\succsim\rangle$的一个纳什均衡。定义一个新的博弈形式$G^*=\langle N,(A_i^*),g^*\rangle$，其中对每个$i\in N$有$A_i^*=\mathcal{P}$

186 且对每个$p\in\times_{i\in N}A_i^*$有$g^*(p)=g((a_i(p_i)))$(注意每个p_i是一偏好组合且p是偏好组合的一个组合。)显然对每个$i\in N$满足$p_i^*=\succsim$的组合p^*是$\langle G^*,\succsim\rangle$的一个纳什均衡且$g^*(p^*)\in f(\succsim)$。 □

注意由此结论不能推知在纳什-实施的分析中我们能将注意力限于每个参与人报告一个偏好组合的博弈，因为真正地纳什-实施选择规则的博弈可能产生不同于由选择规则所决定的结果的非真正的纳什均衡。同时也要注意下列事实是重要的：每个参与人的行动集合是偏好组合的集合，而非(较小的)偏好关系的集合，就如在 DSE-实施显示原理的(b)部分中一样(定理 181.4)。

现在定义在纳什实施分析中一个关键的条件。

▶定义 186.1 选择规则$f:\mathcal{P}\rightarrow C$是**单调的**(monotonic)如果只要$c\in f(\succsim)$且$c\notin f(\succsim')$，那么有某个参与人$i\in N$和某个结果$b\in C$，使得$c\succsim_i b$和$b\succ'_i c$。

也就是，为了在偏好组合是$\succsim$而非在$\succsim'$时，结果c被单调选择规则选择，与某一个别的可选择的结果相关的c的排序至少对一个参与人来说必

定在$\succsim'$下比在$\succsim$下更坏。

单调选择规则f的一个例子是$f(\succsim)$是弱帕累托效率结果的集合：$f(\succsim)=\{c\in C$:没有$b\in C$使得对所有$i\in N$有$b\succ_i c\}$。另一个例子是$f(\succsim)$包含每一个至少有一个参与人喜欢的结果：$f(\succsim)=\{c\in C$:存在$i\in N$,使得对所有$b\in C$,有$c\succsim_i b\}$。

■命题186.2　令$\langle N,C,\mathcal{P},\mathcal{G}\rangle$为一个$\mathcal{G}$是战略博弈形式集合的环境。如果选择规则 纳什-可实施的，那么它是单调的。

证明：假定选择准则$f:\mathcal{P}\to C$由博弈形式$G=\langle N,(A_i),g\rangle$纳什-实施，$c\in f(\succsim)$且$c\notin f(\succsim')$那么有一行动组合$a$，对于它$g(a)=c$，它是博弈$\langle G,\succsim\rangle$而非$\langle G,\succsim'\rangle$的一个纳什均衡。即，有一个参与人$j$和行动$a'_j\in A_j$使得$g(a_{-j},a'_j)\succ'_j g(a)$且$g(a)\succsim_j g(a_{-j},a'_j)$。因此$f$是单调的。 □

◇例186.3　(所罗门的困境)(Solomon's predicament)《所罗门判决》这一圣经故事阐释了实施理论的一些主要思想。两个妇女1和2，她们都说某个孩子是她自己的，她们两个都知道谁是真正的母亲，但是两人都不能证明母亲身份。所罗门试图通过扬言要将孩子劈为两半来找出真相：因为假母亲对孩子被劈成两半的结果偏好优于对真母亲得到孩子这一结果的偏好，而真母亲对于失去孩子的偏好优于看到他被劈成两半这一结果的偏好。所罗门可以把孩子交给两个妇女中的任一个，也可以命令将孩子劈为两半。

187

正式地，令a为孩子被交给母亲1的结果，b为孩子交给母亲2的结果，d为孩子被劈为两半的结果。两个偏好组合是可能的：

$$\theta(1\text{是真母亲}):a\succ_1 b\succ_1 d\text{ 且 }b\succ_2 d\succ_2 a$$

$$\theta'(2\text{是真母亲}):a\succ'_1 d\succ'_1 b\text{ 且 }b\succ'_2 a\succ'_2 d。$$

姑且不管所罗门所谓的智慧，仅由$f(\theta)=\{a\}$和$f(\theta')=\{b\}$所定义的选择规则f不是纳什-可实施的，因为它不是单调的：$a\in f(\theta)$且$a\notin f(\theta')$但没有结果y和参与人$i\in N$使得$a\succsim_i y$和$y\succ'_i a$。(在圣经故事中，所罗门成功地将孩子交给了真母亲：他把孩子给了那个惟一宣布她宁愿放弃孩子而不愿让孩子劈为两半的妇女。或许那个妇女并未领悟所罗门的指令是一战略博弈形式。)

下列结论为选择准则成为纳什-可实施的提供了充分条件。

▶定义 187.1　一个选择准则 $f:\mathcal{P}\to C$ **无否决能力**(no veto power)如果只要对至少 $|N|-1$ 个参与人我们对所有 $y\in C$ 有 $c\succsim_i y$，则 $c\in f(\succsim)$。

■命题 187.2　令 $\langle N,C,\mathcal{P},\mathcal{G}\rangle$ 为一环境，其中 $\mathcal{G}$ 是战略博弈形式集合。如果 $|N|\geqslant 3$ 那么任一单调且无否决能力的选择准则是纳什-可实施的。

证明：令 $f:\mathcal{P}\to C$ 为一无否决能力的单调选择准则。我们构造一个纳什-实施 f 的博弈形式 $G=\langle N,(A_i),g\rangle$ 如下：每个参与人 i 的行动 A_i 的集合是所有三元组 (p_i,c_i,m_i) 的集合，这里 $p_i\in\mathcal{P}$，$c_i\in C$ 且 m_i 是一非负整数。结果函数的值 $g((p_i,c_i,m_i)_{i\in N})$ 定义如下。

• 如果对某个 $j\in N$ 和某个具有 $c\in f(\succsim)$ 的 $(\succsim,c,m)$ 我们有：对所有 $i\in N\setminus\{j\}$ 有 $(p_i,c_i,m_i)=(\succsim,c,m)$，那么

$$g((p_i,c_i,m_i))=\begin{cases}c_j & 若\ c\succsim_j c_j\\ c & 若\ c\prec_j c_j。\end{cases}$$

188　• 否则 $g((p_i,c_i,m_i))=c_k$，这里 k 满足对所有 $j\in N$ 使得 $m_k\geqslant m_j$（在一个平局情形中 k 的确认无甚意义。）

这个博弈形式有三成分。首先，如果所有的参与人就偏好组合 $\succsim$ 和要被实施的结果 $c\in f(\succsim)$ 达成协议，那么结果的解是 c。其次，如果有近似协议——除一个参与人外其他人都同意——那么大多数人占优势，除非例外的参与人报告这样一个结果，即在由大多数人所宣布的偏好关系下比起由大多数人所报告的结果对于他来说该结果并不更好。（且说服计划者相信由别人为他所报告的偏好关系是不正确的）第三，如果存在重大意义的偏好关系，则弱肉强食法则适用："叫得最响的"参与人选择结果。

我们现在证明这个博弈形式纳什-实施 f。对某个 $\succsim\in\mathcal{P}$ 令 $c\in f(\succsim)$。对每个 $i\in N$ 令 $a_i=(\succsim,c,0)$。那么 (a_i) 是博弈 $\langle G,\succsim\rangle$ 的具有结果 c 的一纳什均衡：影响结果的任一参与人 j 的任一偏离（比如说到 $(\succsim',c',m')$）的性质是有这样结果 $c'\prec_j c$。

现在令 (a_i^*) 为博弈 $\langle G,\succsim\rangle$ 的具有结果 c^* 的一个纳什均衡。我们证明 $c^*\in f(\succsim)$。

有三种情形要考虑。首先假设对所有 $i\in N$ 有 $a_i^*=(\succsim',c^*,m')$ 且 $c^*\in f(\succsim')$。如果 $c^*\notin f(\succsim)$ 那么 f 的单调性蕴含了有一个参与人 $i\in N$ 和 $b\in C$ 使得 $c^*\succsim'_i b$ 和 $b\succ_i c^*$。但是然后由参与人 i 至行动 $(\succsim,b,0)$ 的偏离

将行动组合变成一个产生他偏好的结果 b 的行动组合。因此 $c^* \in f(\succsim)$。

第二，假设对所有 $i \in N$ 有 $a_i^* = (\succsim', c^*, m')$ 和 $c^* \notin f(\succsim')$。如果有某个 $i \in N$ 和结果 $b \in C$ 使得 $b \succ_i c^*$，那么参与人 i 可以偏离至 $(\succsim', b, m'')$（对某个 $m'' > m'$），其产生偏好的结果 b。因此 c^* 是每个参与人喜欢的结果；因为 f 无否决能力，所以我们有 $c^* \in f(\succsim)$。

第三，假设对某个参与人 i 和 j 有 $a_i^* \neq a_j^*$。我们证明对至少 $|N| - 1$ 个参与人 c^* 是一个喜欢的结果，故由 f 无否决能力。我们有 $c^* \in f(\succsim)$，因为 $|N| \geqslant 3$ 所以存在 $h \in N \setminus \{i, j\}$；$a_h^*$ 不同于 a_i^* 或 a_j^*，比如说 $a_h^* \neq a_i^*$。如果有一结果 b 使得对某一 $k \in N \setminus \{i\}$ 有 $b \succ_k c^*$，那么 k 对某个 $m'' > m_l$（对所有 $l \neq k$）通过选择 $(\succsim', b, m'')$ 可有利地偏离。因此对所有 $k \in N \setminus \{i\}$ 我们有：对所有 $b \in C$ 有 $c^* \succsim_k b$。（注意参与人 i，不像别的参与人，他不可能通过偏离获得他喜欢的结果，因为所有别的参与人可能达成协议。） □

这种类型结论的兴趣，像第8章中无名氏定理的一样，依赖于在证明中所构造的博弈形式的合理性。这里所构造的博弈形式的一个自然成分是，只有当在由别的参与人所报告的偏好组合下，对抱怨来说所提议的可选择性办法更差时，对一致性的抱怨才被接受。一个较不自然的成分是博弈形式的"喊叫"部分，特别是因为在这里，喊叫是不承担成本的。 189

结论的强度依赖于单调的且无否决能力的选择规则集合的大小。如果有至少三个替代办法并且$\mathcal{P}$是所有偏好组合的集合，那么没有单调的选择函数无否决能力。（这来自于 Muller 和 Satterthwaite(1977)在 p. 147 上的推论）注意：一个单调的函数满足 Muller 和 Satterthwaite 的条件 SPA）因此命题仅对非退化选择准则或有限定义域的选择函数才有意义。

在命题证明中的博弈形式被设计用来涵盖所有可能的选择准则。一个特定的选择准则可被一个更简单的博弈形式实施。下面是两个例子。

◇例 189.1　假设一个物体要分给集合$\{1, \cdots, n\}$中的一个参与人。首先假设对所有可能的偏好组合有惟一一个参与人她宁愿要物体而不愿不要。将物体分给这个参与人的选择函数可由下列的博弈形式实施：在其中，每个参与人的行动集合是$\{Yes, No\}$，结果函数将物体分给具有最低指数的参与人，若有这样一个参与人的话他就报告 Yes，否则分给参与人 n，可以容易地检验如果参与人1是宁愿要那物体而不愿不要它的人，那么惟一均

衡结果是 i 得到物体。

现在假设在每个偏好组合中有两个("有特权的")参与人,他们都宁愿要那物体而不愿不要,同时假设我们想实施将两个结果赋给每个偏好组合的选择准则,在该结果中物体被分给这些参与人中的某位。刚才描述的博弈形式不起作用,因为比如对这些参与人为 1 和 2 的组合就不存在参与人 2 获得物体的均衡。下列的博弈形式确实实施了准则。每个参与人喊出一个参与人的名字和一个数字。若 $n-1$ 个参与人喊同一个名字,比如说是 i,那么 i 获得物体。除非他喊一个不同的参与人的名字,比如说是 j,在此情形中 j 得到物体。在任一别的情形中叫出最大数的参与人得到物体。所有参与人说出同一个有特权的参与人名字的任何一个行动组合是一均衡。任一别的行动组合不是一均衡,因为如果至少 $n-1$ 个参与人就某一个不具有特权的参与人达成协议的话,那么参与人可通过喊别的参与人偏离;如果没有 $n-1$ 个;达成协议的参与人的集合,那么至少有一个有特权的参与人可通过喊一个比任何别的人都大的数来有利地偏离。

◇例 190.1 (所罗门困境)再一次考虑例 186.3 中所描述的所罗门困境。假设争论的目标对两个参与人有货币价值并且所罗门可将目标分给参与人中的某个、或两个都不给,并且可以对他们罚款。那么结果集合是三元组(x, m_1, m_2)的集合,这里要么 $x=0$(物体没给任何参与人)要么 $x\in\{1,2\}$(物体给参与人 x)且 m_i 是对参与人 i 的罚款。参与人 i 的支付是:当她得到物体时,若她是合法所有者则为 v_H-m_i,若他不是则为 v_L-m_i,这里 $v_H>v_L>0$;当他没得到物体时,则为 $-m_i$。有两个可能的支付组合:一个是$\succsim$,在其中参与人 1 是合理的所有者;另一个是$\succsim'$,在其中参与人 2 是合法的所有者。

	Mine	Hers	Mine+
Mine	$(0,\epsilon,\epsilon)$	$(1,0,0)$	$(2,\epsilon,M)$
His	$(2,0,0)$	$(0,\epsilon,\epsilon)$	$(0,0,0)$
Mine+	$(1,M,\epsilon)$	$(0,0,0)$	$(0,2\epsilon,2\epsilon)$

图 190.1 实施例 190.1 所考虑的选择函数的一个博弈形式,在其中,合法的所有者获得物体。(注意方框中的内容是结果,而非支付。)

所罗门王希望实施选择函数 f，对于他 $f(\succsim)=(1,0,0)$ 且 $f(\succsim')=(2,0,0)$。该函数是单调的：例如 $(1,0,0)\succ_2(2,0,(v_H+v_L)/2)$ 且 $(2,0,(v_H+v_L)/2)\succ'_2(1,0,0)$。命题 187.2 并不适用因为仅有两个参与人。不过，下列博弈形式（它比命题证明中的简单）实施 f：每个参与人有三个行动，并且结果函数由图 190.1 给定，这里 $M=(v_H+v_L)/2$，$\epsilon>0$ 足够小。（行动"Mine+"可被解释为对物体的一个无礼要求，如果别的参与人对所有权无争议的话它是要被惩罚的。）

假定我们对所构造的博弈形式的结构感兴趣，该例中博弈形式简单且缺乏"叫"的成分这一事实是吸引人的。在下一部分（参看例 191.2）我们要证明在那个例子中的选择函数可被一个更简单的计划实施。 191

? 练习 191.1　考虑有两个人的情形。令 $N=\{1,2\}$ 且 $C=\{a,b,c\}$，并且假定有两个可能的偏好组合：一个是 $\succsim$，满足 $a\succ_1c\succ_1b$ 和 $c\succ_2b\succ_2a$；另一个是 $\succsim'$，满足 $c\succ'_1a\succ'_1b$ 和 $b\succ'_2c\succ'_2a$。试证明由 $f(\succsim)=a$ 和 $f(\succsim')=b$ 所定义的选择函数 f 是单调的但不是纳什-可实施的。

10.5 子博弈精炼均衡实施

最后，我们转向计划者使用完全信息扩展博弈的情形，并且假定对任一偏好组合，博弈的结果可能是任一子博弈精炼均衡(SPE)。为了激发实施该情形中选择规则的希望，将再一次考虑所罗门困境。

◇例 191.2（所罗门困境）在上例(190.1)中所给定的选择函数 f 被下列博弈形式 SPE-实施。首先参与人 1 被提问物体是否是她的。如果她说"no"那么物体被交给参与人 2，如果他说——"yes"那么参与人 2 被提问他是否是所有者。如果他说"no"那么物体被交给参与人 1，而当他说"yes"那么他获得物体且必须支付一个满足 $v_L<M<v_H$ 的罚款 M，而参与人 1 不得不支付一个小罚款 $\epsilon>0$。这个博弈形式图解见图 191.1（在其中结果而非支付在终点历史旁被表示出来。）

如果参与人 1 是合法的所有者（即偏好组合是 $\succsim$）那么博弈有惟一的子博弈精炼均衡，在其中参与人 2 选"hers"且参与人 1 选"mine"，得到想要

192

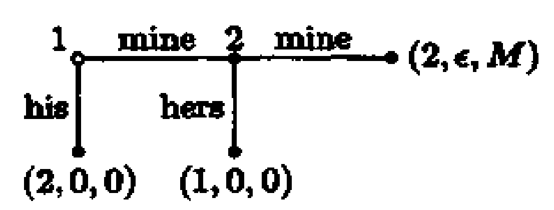


图 191.1 实施由例 190.1 所给的选择函数的一个扩展博弈形式。在每个终点历史旁的向量是与该历史相联系的结果

的结果(1,0,0)。如果参与人 2 是真正的所有者,那么博弈有惟一的子博弈精炼均衡,在其中他选"mine" 且参与人 1 选"his",产生结果(2,0,0)。因此博弈 SPE-实施在例 190.1 中所给定的选择函数。

在本例中所描述的博弈形式的关键思想是参与人 2 面对一个导致他去真正选择的选择。如果他必须这样做了那么参与人 1 面对一个同样导致她去真正选择的选择。经典文献中所用的构造博弈形式在别的背景下使 SPE-实施选择函数的技巧具有同样的思想。在本章剩余部分我们给出一个结论,它展示了 SPE-实施的可能性程度。

令 C^* 为确定的结果集合。我们研究结果集合有下列形式的情形:

$$C=\{(L,m):L \text{ 是} C^* \text{上一不确定事件,且 } m\in\mathbb{R}^N\}。\quad (192.1)$$

如果 $(L,m)\in C$ 那么我们解释 m_i 为由参与人 i 支付的罚款。(注意 m_i 不被转移到别的参与人。)

我们假定对每个参与人 i 有一支付函数 $u_i:C^*\to R$ 使得参与人 i 关于 C 的偏关系由函数 $E_L(u_i(c^*))-m_i$ 表示;我们将这种支付函数的一个组合 $(u_i)_{i\in N}$ 等同于一个偏好组合,并且简单地用 $u_i(L)$ 表示 $E_Lu_i(c^*)$。我们进一步假设 $\mathcal{P}=U^N$,这里 U 是一个排除了常数函数的有限集合。我们所考虑的博弈形式集合 $\mathcal{G}$ 是完全信息且结果在 C 中的扩展博弈集合。

我们所探讨的实施概念弱于那些先前研究的:我们构造一个博弈形式 $\Gamma\in\mathcal{G}$,它的性质是对任一偏好组合 $u\in\mathcal{P}$ 博弈 $\langle\Gamma,u\rangle$ 有惟一的子博弈精炼均衡,在均衡中想要的可选择方法能以很高的概率实现,尽管不必是一定的。更精确地,我们说一个选择函数 $f:\mathcal{P}\to C^*$ 是**真正地 SPE-可实施的**(virtually SPE-implementable)如果对任意 $\epsilon>0$,存在一扩展博弈形式 $\Gamma\in\mathcal{G}$,使得对任一偏好组合 $u\in\mathcal{P}$ 扩展博弈 $\langle\Gamma,u\rangle$ 有惟一的子博弈精炼均衡,在其中结果是概率至少为 $1-\epsilon$ 的 $f(u)$。

193 ■命题 193.1 令 C^* 为一确定的结果集合,令 $\langle N,C,\mathcal{P},\mathcal{G}\rangle$ 为一环

境，其中$|N|\geqslant 3$，C 由(192.1)给定，$\mathcal{P}=U^N$，这里 U 为上面所描述的支付函数(有限)集合，$\mathcal{G}$ 为完全信息且结果在 C 中的扩展博弈形式集合。那么每个选择函数 $f:\mathcal{P}\to C^*$ 是真正地 SPE-可实施的。

证明：首先注意因为 U 中的支付函数不存在所有结果是无差别的情况，所以对任一不同的支付函数二元组(v,v')有关于 C^* 的不确定事件二元组$(L(v,v'),L'(v,v'))$使得 $v(L,(v,v'))>v(L'(v,v'))$且 $v'(L'(v,v'))>v'(L(v,v'))$。(参与人在不确定事件 $L(v,v')$和 $L'(v,v')$之间的选择因此表明他的支付函数是 v 还是 v'。)对任一支付函数三元组(u,v,v')令 $L^*(u,v,v')$为由 u 所偏好的集合$\{L(v,v'),L'(v,v')\}$中的元素。那么对任一支付函数二元组(v,v')我们有 $u(L^*(u,v,v'))=\max\{u(L(v,v')),u(L'(v,v'))\}$，所以对任一支付函数 u'有$u(L^*(u,v,v'))\geqslant u(L^*(u',v,v'))$。进一步，$u(L^*(u,u,u'))>u(L^*(u',u,u')$。

现在假设对某个二元组(v,v')，报告支付函数 u 的参与人被赋予彩票不确定事件)$L^*(u,v,v')$。令 B 是对于所有不同的支付函数二元组(u,u')的任一具有支付函数 u 的参与人关于所有二元组(v,v')报告 u 而非 u'时的平均所得的最小值：

$$B=\min_{(u,u')\in W}\left(\frac{1}{M}\sum_{(v,v')\in W}|u(L^*(u,v,v'))-u(L^*(u',v,v'))|\right),$$

这里W是所有不同支付函数的二元组集合，且 $M=|U|(|U|-1)$(W元素的数目)。由上述的证明可知 $B>0$。

对每个 $\epsilon>0$，我们构造一个有 $K+1$ 个阶段的博弈形式(K 在下面被确定)。每个阶段包含$|N|$个阶段。令 $N=\{1,\cdots,n\}$。在 1 至 K 阶段的每个第i 个子阶段中，参与人 i 报出一个 偏好组合(U^N 的一个元素)；在 $K+1$阶段的第 i 个子阶段中参与人i 报出一个支付函数(U 的一个元素)。

对任一段终点历史包含一个不确定事件及一个罚款组合的结果定义如下：对 $k=1,\cdots,K$ 的每个阶段 k 给予不确定事件一个具有概率$(1-\epsilon)/K$ 的结果。如果在阶段 k 除了可能的一个之外的所有参与人报出相同的组合，比如说是(u_i)，那么这个结果是 $f((u_i))$；否则它是某个固定的结果 $c^*\in C'^*$。

194 最后阶段的每个子阶段将概率$\epsilon/|N|$赋给不确定事件。这个概率被分为 M 个相等部分，每个部分对应于一对支付函数。与$(i,(v,v'))\in N\times W$相对应的概率 $\epsilon/|N|M$ 被赋给彩票(不确定事件)$L^*(u'_i,v,v')$，这里 u'_i 是参与人i 在阶段$K+1$ 报出的支付函数。

至于罚款，一个参与人如果在1至K阶段是最后一个报出不同于在阶段$K+1$所报的组合的人，那么他得支付$\delta>0$。并且，一个参与人得对1至K阶段的所有别的参与人报出同一个且不同于他所报的支付的每个阶段的支付δ/K（为了让该奇异参与人显露出来并被较好地确定我们需要至少三个参与人）。

最后，我们选δ使得$\epsilon B/|N|>\delta$和K使得$(1-\epsilon)D/K+\delta/K<\delta$，这里

$$D=\max_{v,c,c'}\{v(c)-v(c'):v\in U,c\in C^*,\text{且}\ c'\in C^*\}。$$

我们现在证明对任一$(u_i)\in U^N$，博弈$\langle\Gamma,(u_i)\rangle$（这里$\Gamma$是上面所描述的博弈形式）有惟一的一个子博弈精炼均衡，在其中结果是概率至少为$1-\epsilon$的$f((u_i))$。我们先证明每段历史之后，在每个子博弈精炼均衡中每个参与人i在$K+1$阶段报出他的真实支付函数。如果参与人i在此阶段报告一个假支付函数，那么相对他报出的真实支付函数的情形，在结果中有两个变化。第一，通过第$K+1$阶段的第i子阶段，赋给结果的彩票改变，它使参与人i的期望支付至少减少了$\epsilon B/|N|$。第二，如果参与人i通过改变他在最后一期的所报，从而避免成为最后一个在$1-K$阶段中的某阶段报出一个不同于在最后阶段所报组合的偏好组合的参与人，那么他可避免罚款。因为$\epsilon B/|N|>\delta$，所以最后结果是对任一参与人最优的行动是在最后一期报出他的真实支付函数。

我们现在证明在任一子博弈精炼均衡中所有参与人在$1-K$的每个阶段报出真实偏好组合(u_i)。假设相反，有某个参与人不这么做；令参与人i是在第k个阶段最后一个不这样做的参与人。我们认为参与人i可通过偏离且报出真实的偏好组合(u_i)来增加他的支付。有两种情形要考虑。

195

• 如果没有别的参与人在第k个阶段报出不同于(u_i)的一个组合，那么参与人i的偏离对结果无影响；它将他得支付的罚款减少δ/K，因为他不再报出一个不同于由别的参与人所报的组合，并且可能进一步将罚款减少δ（如果他不再是最后报出不同于(u_i)的支付的参与人。）

• 如果某个参与人在阶段k取出一个不同于(u_i)的组合，那么应归于阶段k的最后不确定事件的成分可能改变，并将参与人i的支付至多减少$(1-\epsilon)D/K$并且他可能成为阶段k奇异参与人并被罚款δ/K。同时他避免罚款δ（因为他确定地不是最后报出一个不同于(u_i)的组合的参与人）。因为$(1-\epsilon)D/K+\delta/K<\delta$，所以最后的结果是：偏离是有利的。

我们可以总结：在每个子博弈精炼均衡中，每个参与人在每阶段不得不报出一个偏好组合的历史之后报出真实的偏好组合，所以博弈的结果至少

赋概率 $1-\epsilon$ 给 $f((u_i))$。 □

在这个证明中所构造的博弈形式基于两个思想，阶段 $K+1$ 被设计使得对每个参与人报出他的真实支付函数是占优的，在较早阶段一个参与人可能报出一个不同于真实的偏好组合，因为这样做他可能影响最后结果使其对他有利，但参与人都不想最后一个这样做，从而导致了没有参与人这样做。

[注解]

Gibbard-Satterthwaite 定理(181.2)出现在 Gibbard(1973)和 Satterthwaite(1975)。替代性证明可参看 Schmeidler and Sonnenschein(1978)和 Barberá(1983)。命题 184.2 应归于 Groves and Loeb(1975)；练习 185.1 中的结论应归于 Green and Laffont(1977)。Mashin 第一个证明了命题 187.2 (参看 Maskin(1985))；我们所给的证明应归于 Repullo(1987)。第 10.5 节的讨论基于 Abreu and Matsushima(1992)，他通过在战略博弈形式中反复剔除强劣战略证明了一个等价于命题 193.1 的结论；我们提供的变形来自于 Glazer and Perry(1996)。例 186.3、例 190.1 和例 191.2 中的所罗门困境分析最早出现在 Glazer and Ma(1989)。

对于 SPE-可实施选择函数的描述见 Moore and Repullo(1988)。 196

在写作本章中我们得益于 Moore(1992)(文献的一个概览)和 Repullo 未发表的教学笔记。

197 第三编

不完全信息扩展博弈

不完全信息扩展博弈模型允许参与人在采取行动时仅有以前所采取的行动的部分信息。这种模型很丰富;它不仅包括了参与人不完全知道别的参与人以前行动的情形,同时也包括了诸如在博弈过程中参与人忘记了他以前所采取的行动的情形及参与人不能确定别的参与人是否已行动的情形。

我们用第 11 章去探讨不完全信息扩展博弈的概念,直到第 12 章研究这种博弈主要的解的概念,即序贯均衡的概念。

199

第 11 章

不完全信息扩展博弈

在本章我们探讨不完全信息扩展博弈的概念，其中每个参与人采取行动时可能仅有以前已采取的行动的部分信息。

11.1 不完全信息扩展博弈

11.1.1 介绍

在我们以前所研究的每个模型中总有这样的感觉：参与人在做选择时不完全知道相关信息。在战略博弈中，参与人采取行动时不知道别的参与人采取的行动；在贝叶斯博弈中，参与人既不知道别的参与人的个人信息也不知道他们采取的行动；在完全信息扩展博弈中，参与人不知道由别的参与人所计划的将来行动。

这里我们所研究的模型——不完全信息扩展博弈——不同之处在于参与人还可能不知道已做出了的一些（或全部）选择。同前面一样，我们是通过假设每个参与人在行动时形成一个关于未知的预期来分析模型的。不过，这些期望不同于那些我们以前考虑过的。它不像在战略博弈中的期望，它们不单单派生于参与人的均衡行动，因为参与人可能面对与那个行动不一致的情形；也不像贝叶斯博弈中的期望，因为它们不单单从均衡行动和关于机会行动的外部信息推断而来。最后，更不像完全信息扩展博弈中的期望，因为它们不仅仅与过去发生了的事件有关。

11.1.2 定义

下列定义将完全信息扩展博弈的定义(89.1)推广到允许参与人采取行动时不完全知道过去的事件。它对外部不确定性也是允许的：一些行动可能由"机会"进行(参看第6.3.1节)。它并不包括另一个我们在第6.3节所讨论的完全信息扩展博弈定义的推广，其中不止一个参与人在任一段历史之后可能行动(不过，可参看例202.1后的讨论)。

▶定义200.1 一个扩展博弈有下列成分

- 一个有限集合 N(**参与人的集合**)。
- 一个满足下列三个条件的(有限或无限)序列集合 H。
  - 空序列 $\varnothing$ 是 H 的一个元素。
  - 如果 $(a^k)_{k=1,\cdots,K}\in H$，(这里 K 可能是无限的)且 $L<K$ 那么 $(a^k)_{k=1,\cdots,L}\in H$。
  - 如果一个无限序列 $(a^k)_{k=1,\cdots}$ 对每个正整数 L 满足 $(a^k)_{k=1,\cdots,L}\in H$，那么 $(a^k)_{k=1,\cdots}\in H$。

(H 的每个元素是一段**历史**；历史的每个成分是由参与人所采取的一个行动。)一段历史 $(a^k)_{k=1,\cdots,K}\in H$ 是**终点**如果它是无限的或如果没有 a^{K+1} 使得 $(a^k)_{k=1,\cdots,K+1}\in H$。非终点历史 h 之后的可行行动集合用 $A(h)=\{a:(h,a)\in H\}$ 表示，终点历史集合用 Z 表示。

- 一个给每段非终点历史($H\setminus Z$ 的每个元素)赋 $N\cup\{c\}$ 的一个元素的函数 P。(P 是**参与人函数**，$P(h)$ 是在历史 h 之后采取行动的参与人。如果 $P(h)=c$ 那么机会确定在历史 h 之后的行动。)
- 一个将每段历史 h 与 $A(h)$ 上的一个概率测度 $f_c(\cdot|h)$ 相联系的函数 f_c，这里每个这种概率测度都独立于每个其它的这种概率测度。($f_c(a|h)$ 是 a 在历史 h 之后发生的概率。)
- 对每个参与人 $i\in N$，$\{h\in H:P(h)=i\}$ 的一个分割 $\mathcal{I}_i$，它的性质是：只要 h 和 h' 在分割的同一元素中，那么 $A(h)=A(h')$。对 $I_i\in\mathcal{I}_i$ 我们用 $A(I_i)$ 表示集合 $A(h)$ 且对任一 $h\in I_i$，用 $P(I_i)$ 表示参与人 $P(h)$。($\mathcal{I}_i$ 是参与人 i 的**信息分割**，一个集合 $I_i\in\mathcal{I}_i$ 是参与人 i 的一个**信息集合**。)
- 对每个参与人 $i\in N$ 关于 Z 上不确定事件的一个偏好关系(参与人 i 的偏好关系)$\succsim_i$，它可被表示为定义在 Z 上的一个支付函数的期望值。

我们称成分满足定义中条件的五元组$\langle N,H,P,f_c,(\mathcal{I}_i)_{i\in N}\rangle$(它排除了参与人的偏好)为**扩展博弈形式**。

相对于完全信息扩展博弈和机会行动的定义(参看第6.3.1节),新的成分是信息分割族$(\mathcal{I}_i)_{i\in N}$我们将在任一给定的$\mathcal{I}_i$的元素中的历史解释为对参与人i是不可辨别的。因此博弈模化了这样一种情形,即每段历史$h\in I_i\in\mathcal{I}_i$之后参与人i被告知I_i中的某段历史发生了但并未被告知历史h已发生了。只要h和h'是在$\mathcal{I}_i$相同元素中,那么$A(h)=A(h')$的条件抓住了这样的思想,即如果$A(h)\neq A(h')$那么当参与人i面对$A(h)$时,他可推断历史不是h',这与我们对于$\mathcal{I}_i$的解释厢矛盾。(注意不像扩展博弈的标准定义,定义200.1并不排除一个信息集合包含两段历史h和h'的可能性,这里对某个行动序列$(a^1,\cdots,a^K)$有$h'=(h,a^1,\cdots,a^K)$)。

每个参与人的信息分割是博弈的一个基本要素;参与人不必非要根据他所观察到的行动就能辨别处在他的分割的不同元素中的历史。当博弈进行时,给定参与人关于别的参与人的行动推测,他可能做精炼了这一信息的推论。例如,假设博弈的第一个行动由参与人1进行,他在a和b间选择,第二个行动由参与人2进行,他的一个信息集合是$\{a,b\}$。我们解释这个博弈模化了参与人2并未观察到参与人1的选择的情形:当他行动时,并不知道参与人选a还是b。但是,当他行动时参与人2可能推断(从他关于状态的知识或从关于参与人1的内省)历史是a,即使他没观察到由参与人1所选择的行动。

每个参与人的偏好关系是就在终点历史集合上的不确定事件被定义的,因为即使参与人的行动是确定的,但是模型允许的机会运动会导致这种不确定事件。

注意定义200.1在下列意义下扩展了我们的完全信息扩展博弈定义(89.1):若$\langle N,H,P,f_c,(\mathcal{I}_i)_{i\in N},(\succsim_i)_{i\in N}\rangle$,是一扩展博弈且每个参与人的信息分割的每个元素是单元素集,那么$\langle N,H,P,f_c,(\succsim_i)_{i\in N}\rangle$是一完全信息(和机会行动)扩展博弈。

202

◇例202.1 一个不完全信息扩展博弈的例子如图202.1所示。在此博弈中参与人1先行动,在L和R间选择。若她选R,则博弈结束。若她选L,则轮到参与人2行动;他已知参与人1选了L,他在A和B间选择。无论哪种情况都轮到参与人1去行动,且当这样做时她并不知道参与人2选了A还是选了B。该事实在图中由连接历史末尾的虚线表示,在该历史之后参与人1不得不第二次行动,从集合$\{l,r\}$中选择一个行动。正式地,我们有$P(\phi)=P(L,A)=P(L,B)=1$, $P(L)=2$, $\mathcal{I}_1=\{\{\phi\},\{(L,A),$

$(L,B)\}\}$，且 $\mathcal{I}_2=\{\{L\}\}$(参与人1有两个信息集合且参与人2有1个)。在终点历史之下的数字是参与人的支付。(在每个二元组中第一个数字是参与人1的支付，第二个数字是参与人2的支付。)

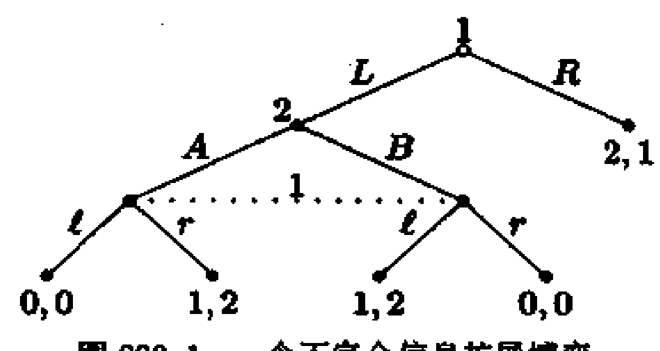


图202.1 一个不完全信息扩展博弈

在定义200.1中我们不允许有多于一个参与人在任一历史之后行动。不过，如我们已定义的扩展博弈可模化这样一种情形是有道理的。为说明之，考虑上面的例子。在参与人1选择 L 后，参与人1和2所涉及的情形在本质上和由他们同时选择行动的完全信息博弈所反映的情形是一样的。(这就是在很多经典文献中完全信息扩展博弈的定义不包含同时行动可能性的理由。)

在完全信息扩展博弈中，参与人的一个战略是对每段历史(在其后参与人选择一个行动)确定一个行动的函数(定义92.1)。下列定义是对一般扩展博弈的一个扩展，因为我们以后要考虑参与人会随机化的可能性，我们加上修饰词"纯的"。

▶定义203.1 在扩展博弈 $\langle N,H,P,f_c,(\mathcal{I}_i),(\succsim_i)\rangle$ 中参与人 $i\in N$ 的一个**纯战略**(a pure strategy of player $i\in N$)是一个对每个信息集合 $I_i\in\mathcal{I}_i$ 赋 $A(I_i)$ 中的一个行动的函数。 203

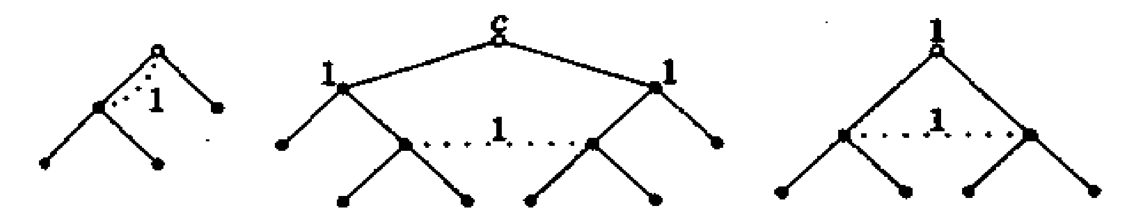


图203.1 三个单人不完全记忆扩展博弈

像对完全信息扩展博弈一样，我们可将任一个扩展博弈与一个战略博弈联系；参看战略形式定义(94.1)和简化的战略形式定义(95.1)。(注意这里战略组合的结果可能是关于终点历史的一个不确定事件，因为我们允许机会行动。)

11.1.3 完全和不完全记忆

扩展博弈能够抓住一个范围宽广的信息环境。特别地，它能抓住在某些时点上参与人忘记了他们早先所知的情形。我们称在每个时点每个参与人都记得他在过去的一切所知的博弈为**完全记忆博弈**(games with perfect recall)。为了正式定义这种博弈，令$\langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_i)\rangle$为一扩展博弈形式且令$X_i(h)$是沿着历史$h$参与人$i$的经历记录：$X_i(h)$是包含参与人在历史$h$中所碰到的信息集合和按照这些事件发生顺序对它们采取行动的序列。例如，在图202.1的博弈中，$X_1((L,A))=(\phi, L, \{(L,A),(L,B)\})$。

?练习 203.2 试给出$X_i(h)$的一个正式定义。

▶定义 203.3 一个扩展博弈形式有**完全记忆**(perfect recall)如果对每个参与人i我们有：只要h和h'在参与人i的同一信息集合中则$X_i(h)=X_i(h')$。

图202.1中的博弈有完全记忆，而图203.1中的三个(单人)博弈形式则没有完全记忆。在左边的博弈中参与人不知道她是否已作了选择：当选204择一个行动时，她不知道她是在博弈的开始还是已经选择了她左边的行动。在中间的博弈中参与人忘记了她原先知道的一些事情：当对她的最后信息集合做选择时她不知道机会行动，尽管当她做以前的行动时她已知了。在右边的博弈中她并不记得她在过程中采取的行动。

关于不完全记忆的经典文献是很少的。对一个不完全记忆情形，博弈论进行处理的例子是第9章中的机器博弈。在机器博弈所模化的基本的重复博弈中，当采取行动时每个参与人不知道过去的事件，包括他自己原先的行动。他记忆能力的大小依赖于他的机器结构。记忆越多需要越多的状态；因为状态是有成本的，即使在均衡中参与人仍然可能不完全记得他自己过去的行动。

11.2 扩展博弈等价原理

一些扩展博弈似乎表示了与其他(博弈)一样的战略情形。例如，考虑

图 204.1 中的两个一人博弈。(在这些博弈中,就像在本节其他博弈中一样,我们将终点历史与字母联系起来。如果两段终点历史被赋给相同的字母,那么两段历史代表了同一事件;特别地,所有参与人对它们无差别)。正式地,两个博弈是不一样的:在左边的博弈中参与人 1 做两个决策,而在右边博弈中她只做一个决策。不过,理性原理表明两个博弈模化了同一情形。

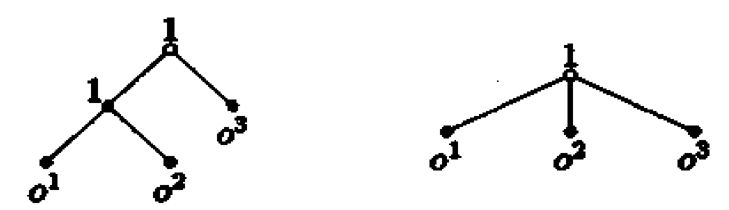


图 204.1 似乎模化了同一情形的两个不同的单人博弈

现在我们进一步给出代表了相同情形的博弈对的例子,并且讨论一些概括了这些例子的原理,这些例子值得讨论。我们认为这些原理不该视为公理;我们简单地认为对它们的研究说明了扩展博弈的意思,特别是不完美信息扩展博弈。 205

我们所考虑的四个原理都保留了博弈的简化战略形式:如果一个扩展博弈根据这些原理等价于另一个,那么两个博弈的简化战略形式是一样的。因此不仅仅依赖于简化战略形式的一个解的概念可能将不同结果赋给根据这些原则而等价的博弈;为了证明这样一个解的概念是合理的,人们不得不证明至少有一个原理是不恰当的。

令 Γ_1 为图 205.1 中的博弈。我们所讨论的原理认为这个博弈等价于如下的其他四个博弈。

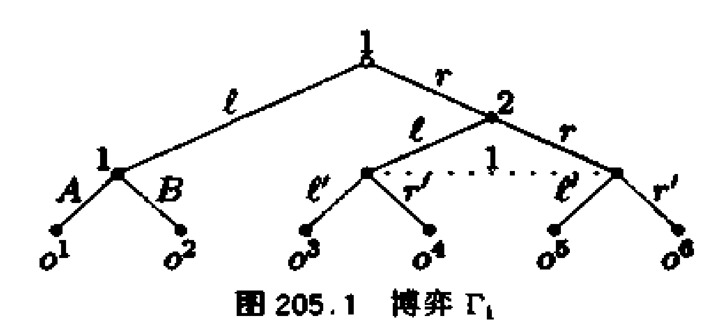


图 205.1 博弈 Γ_1

通胀—紧缩(Inflation-Deflation)根据这个原理 Γ_1 等价于图 205.2 中的 Γ_2。在 Γ_2 中参与人 1 有不完全记忆:对于她的第二个信息集合她不知她在博弈开始时选了 r,而不是选取了 ℓ。那就是,三段历史 ℓ,(r,ℓ)和(r,r)都在一个信息集合,而历史(r,ℓ)和(r,r)在另一个信息集合。我们对类似 Γ_2 的博弈的解释是:参与人 1 在博弈结束行动时忘记了她在博弈开始时所

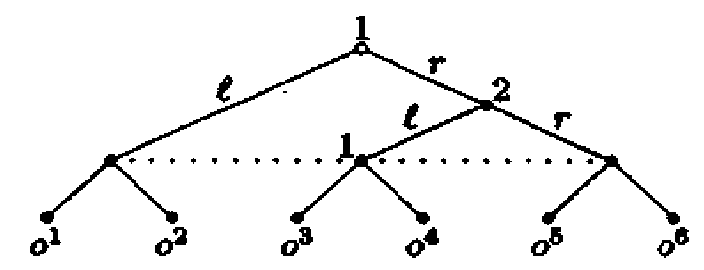


图 205.2　博弈 Γ_2 根据通胀—紧缩原理等价于 Γ_1

206 采取的行动。不过，信息集合固有的历史信息，在此解释下参与人经常记得他在过去的所知和所为，并且可通过对知识进行推断来获得信息。确实，Γ_1 和 Γ_2 是等价的证明依赖于参与人 1 能进行这种推断的假设。根据讨论她所知历史是 ℓ 还是 $\{(r,\ell),(r,r)\}$ 的一个元素事实是与她的战略谋划无关的，因为在任一情形下她能从她的关于自己在博弈开始时的行动知识中推知这个信息。在此解释下称像图 205.2 中的博弈为有"不完美记忆"是不恰当的；信息集合反应了在情形固有的信息中的不完美性，它能被参与人记得他们过去经历的能力推翻。

正式地，根据通胀—紧缩原理扩展博弈，Γ 等价于扩展博弈 Γ'，如果 Γ' 不同于 Γ 之处仅在于有某个 Γ 中参与人 i 的信息集合是 Γ' 中参与人 i 的信息集合的一个并集，且有下列性质：在并集的两个不同元素中的任意两段历史 h 和 h'，有在参与人 i 的同一信息集合中的子历史并且参与人 i 对这个信息集合的行动在 h 和 h' 中是不一样的。（为了将之与上面的例子相联系，令 $\Gamma=\Gamma_2,\Gamma'=\Gamma_1,i=1$）

多余行动的加法(Addition of Superfluous Move)。根据这个原理 Γ_1 等价于图 206.1 中的博弈 Γ_3。证明如下，如果在博弈 Γ_3 中参与人 1 在博弈开始时选 ℓ，那么参与人 2 的行动是无关的，因为它对结果没影响(注意在博弈左下部的结果)。因此 Γ_3 中参与人 2 是否知道参与人 1 在博弈开始时的选择应该对他的选择没影响。

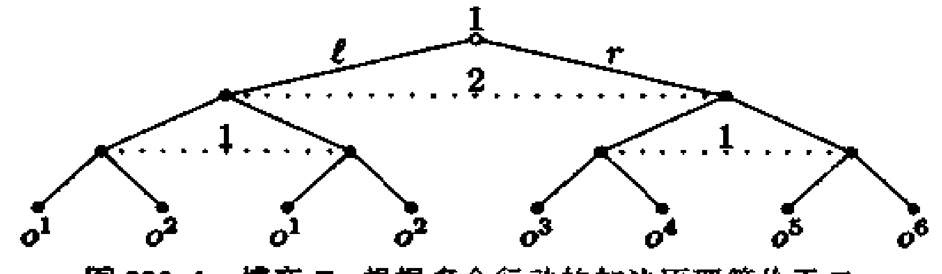


图 206.1　博弈 Γ_3，根据多余行动的加法原理等价于 Γ_1

正式地，多余行动加法原理如下。令 Γ 为一扩展博弈，令 $P(h)=i$ 且

令$a \in A(h)$。假设对任一紧随历史(h,a)的行动序列h'(包括空序列)和对任一$b \in A(h)$我们有 207

- $(h,a,h') \in H$当且仅当$(h,b,h') \in H$，且(h,a,h')是终点当且仅当(h,b,h')是终点。
- 如果(h,a,h')和(h,b,h')都是终点，那么对所有$i \in N$有$(h,a,h') \sim_i (h,b,h')$。
- 如果(h,a,h')和(h,b,h')都是非终点，那么它们在同一个信息集合中。

那么Γ等价于博弈Γ'。Γ'不同于Γ之处仅仅在于(ⅰ)有形如$(h,c,h')(c \in A(h))$的历史由简单历史(h,h')所代替；(ⅱ)如果包含Γ中历史h的信息集合I_i不是一单元素集合，那么h从Γ'中的I_i被排除，(ⅲ)赋给Γ'中历史(h,h')的参与人是赋给Γ中(h,a,h')的参与人，(ⅳ)(h,h')和(h,h'')在Γ'的同一信息集合中当且仅当(h,a,h')和(h,a,h'')在Γ的同一信息集合中，(ⅴ)参与人的偏好被相应修改。(注意Γ是有多余行动的博弈，去掉多余行动导出Γ'。为了使该定义与Γ_1和Γ_3相关，令$\Gamma=\Gamma_3$，$\Gamma'=\Gamma_1$，$i=2$，$h=\ell$，并令a为参与人2的一个行动。)

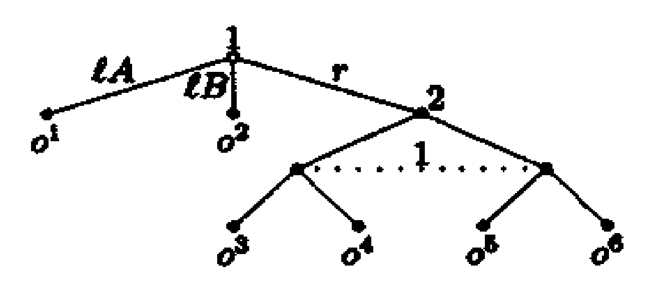


图207.1 博弈Γ_4，根据联合行动原理等价于Γ_1

联合行动(Coalescing of Moves)。根据这个原理，Γ_1等价于图207.1中的博弈Γ_4，在Γ_1中参与人1先在ℓ和r间选择，然后在她选择1的事件中在A和B间选择。其思想是：这个决策问题等价于像在Γ_4中在ℓA，ℓB和r间作决策的问题。证明如下：如果参与人1是理性的，那么她在Γ_1开始时的选择要求她将选ℓ和选r的结果作比较；为了确定ℓ的结果要求她在博弈的开始计划好选A还是选B。

正式地，联合行动原理如下。令Γ为一扩展博弈且令$P(h)=i$，$h \in I_i$。令$a \in A(I_i)$并假设$\{(h',a): h' \in I_i\} = I'_i$是参与人$i$的一个信息集合。令$\Gamma'$为不同于$\Gamma$的博弈，其不同之处仅在于：信息集合$I'_i$被删除，对所有$h' \in I_i$历史$(h',a)$被删除，每段历史$(h',a,b,h'')$(这里$b \in A(h',a)$)被历史$(h',ab,h'')$所代替，这里$ab$是一个新行动(它并非$A(h')$的一 208

个元素),同时信息集合、参与人函数及参与人的偏好都被相应改变。那么 Γ 和 Γ' 是等价的。(在例子中令 $\Gamma=\Gamma_1, \Gamma'=\Gamma_4, h=\phi, i=1$ 且 $a=\ell$)。

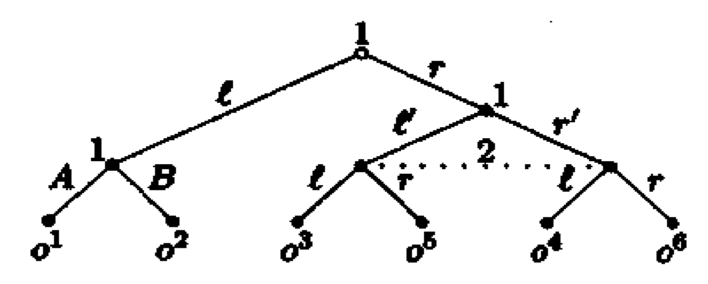


图 208.1 博弈 Γ_5,根据行动互换原理等价于 Γ_1

行动互换(Interchange of Noves)根据这个原理 Γ_1 等价于图 208.1 中的博弈 Γ_5。其思想是:如果一个参与人在做选择时没有任何关于别的参与人的行动信息,那么进行的顺序是不重要的。

正式地,行动互换原理如下(它允许变换比从 Γ_1 到 Γ_5 的变换更一般)。令 Γ 为一扩展博弈且令 $h \in I_i$, I_i 是参与人 i 的一个信息集合。假设对所有在 I_i 的某个子集 H' 中的历史 h' 在 i 已经这样做之后采取一个行动的参与人是 j, j 未知 i 在 h' 所采取的行动。也就是,假定对所有 $h' \in H'$ 和所有 $a \in A(h')$ 有 $(h', a) \in I_j$,这里 I_j 是参与人 j 的一个信息集合。信息集合 I_j 可能包含别的历史;令 H'' 为包含了形如 (h', a)(对每个 $h' \in H'$)的历史的 I_j 的子集。那么 Γ 等价于这样的扩展博弈,即每段类型为 (h', a, b)($h' \in H'$)的历史由 (h', b, a) 替代,参与人 i 的信息集合 I_i 由 $I_i \setminus H'$ 和所有形如 (h', b) 的历史 $(h' \in H', b \in A(h', a))$ 的并集取代,参与人 j 的信息集合 I_j 被 $(I_j \setminus H'') \cup H'$ 取代。(在例子中我们有 $\Gamma=\Gamma_1, \Gamma'=\Gamma_5, h=r, i=2, j=1, H'=I_2=\{r\}, H''=I_1=\{(r,\ell),(r,r)\}$。

☑练习 208.1 系统表达一个参与人扩展博弈的联合行动和通胀—紧缩原理,并且证明每个不完全信息和无机会行动(但可能有不完全记忆)的 209 一个人扩展博弈(在其中没有信息集合既包含历史 h 又包含 h 的一个子历史)等价于具有惟一的终点历史的决策问题。(即使对机会行动的博弈该结论也成立,仅为简便才排除了它。)

Thompson(1952)证明了这四个变换保留了简化战略形式。他将注意力仅限于没有信息集合既包含了历史 h 又包含了 h 的某一子历史的有限扩展博弈,同时证明了如果任何两个这种博弈有相同的简化战略形式,那么通过四个变换的一个序列从其中一个可得到另一个。我们不知道对这个结论的任何好的证明。我们简单地给个例子来说明该过程:从图 210.1 顶部的

博弈开始，图 210.1 和 211.1 中的变换序列导致了图 211.1 中底部完美信息和同时行动扩展博弈。

210

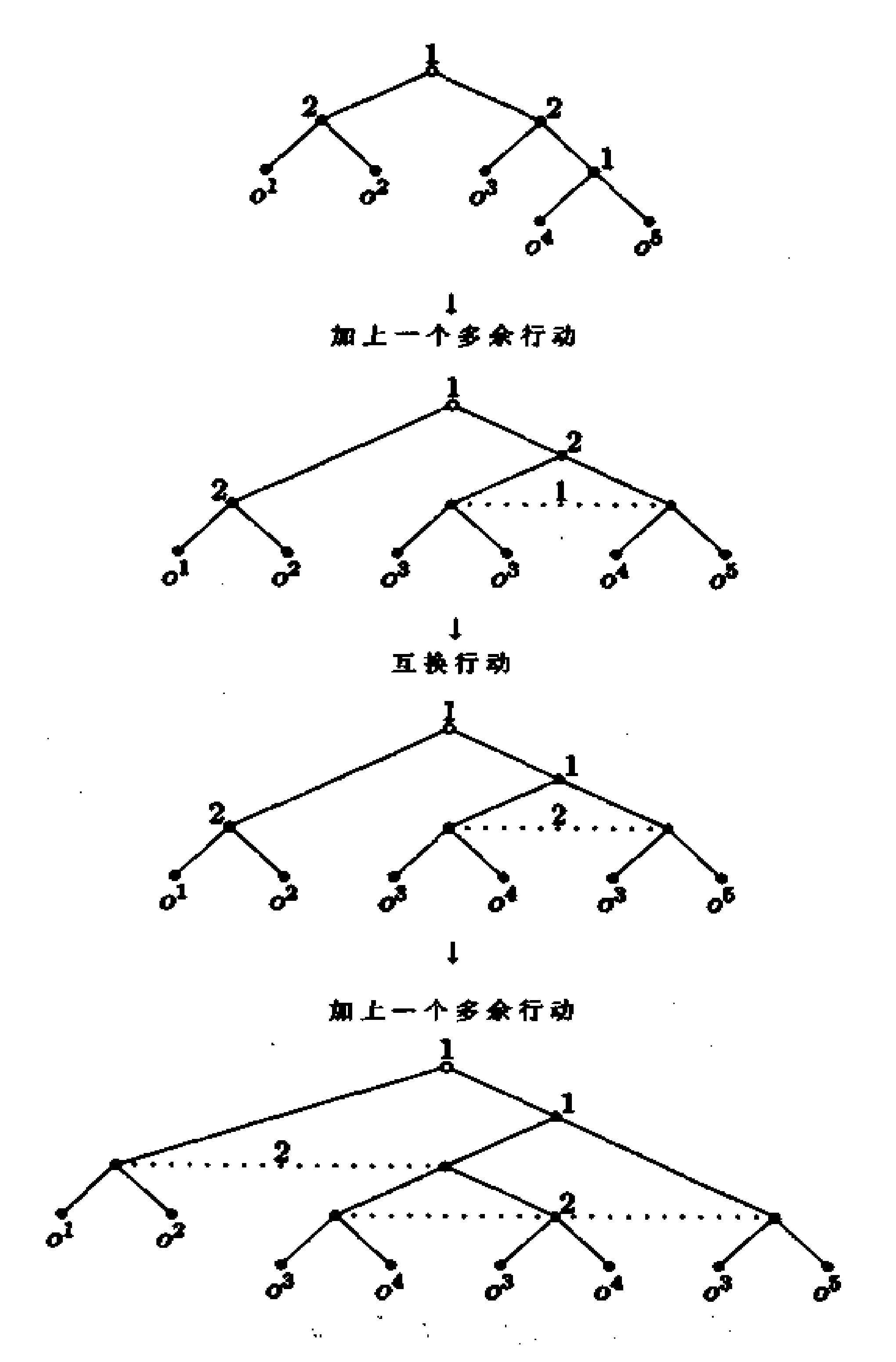


图 210.1　在一个将顶部博弈转化为完美信息和同时行动的扩展博弈的序列中前三个变换。变换在图 211.1 中继续



↓

加上三个多余行动

↓

膨胀一紧缩

↓

联合行动

图 211.1　在将图 210.1 顶部的博弈转化成在图中底部的完美信息和同时行动扩展博弈的序列中后三个变换

11.3　设计效应和扩展博弈的等价

在前一部分所讨论的扩展博弈间的等价原理基于一个忽略了设计效应

的理性概念。这个概念是与心理学家的发现不相容的:即使问题设计中的微小变化也可能极大地影响参与者的行为(例子可参看 Tversky 和 Kahneman(1986))。

为了说明根据这些原理而等价的博弈可能会在它们的设计中不一样并且导致不同的行动,考虑图 212.1 中的严格竞争博弈。中间的博弈是由顶部博弈加一个多余行动得到的,下部的博弈是每个扩展博弈的战略形式。

在这些博弈中关于行为的一个合理原理是最大最小化。不过,这个原理在这些博弈中产生了不同的结果。在底部的博弈中参与人 1 的最大最小化者是纯战略 r,而在顶部的博弈中最大最小化的逻辑使她应用混合战略 $(1/2, 1/2)$(因为她知道机会正确行动。)

这个例子最早是作为展示最大最小化原理的困境而被提出的,但我们将它视为一个更深问题的一部分:考虑设计效应时如何分析博弈论的情形,这是在当代研究中能引起兴趣的问题。 212

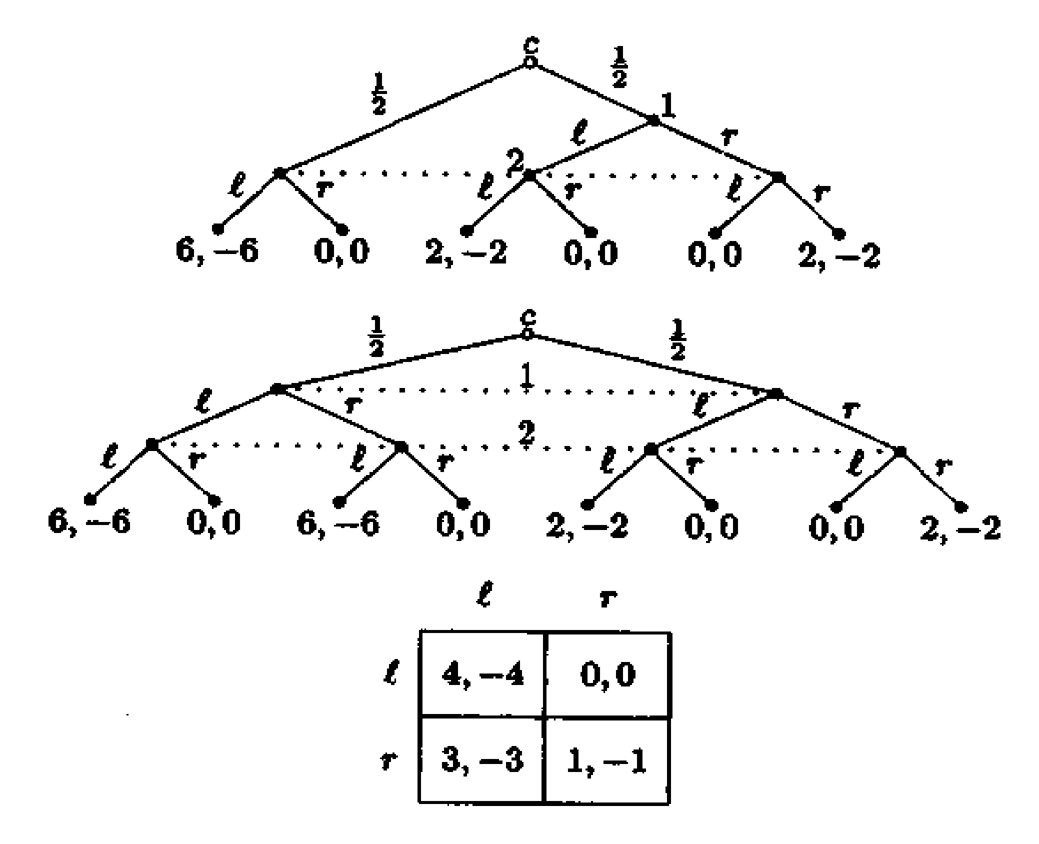


图 212.1 三个博弈,中间的博弈由顶部的博弈增加一个多余行动获得。下部的博弈是顶部和中间博弈的战略形式

11.4 混合和行为战略

在定义 203.1 中我们定义了扩展博弈中纯战略的概念。有两个方法模化在这种博弈中参与人的行动依赖于随机因素的可能性。

▶定义 212.1 在扩展博弈$\langle N,H,P,f_c,(\mathcal{I}_i),(\succsim_i)\rangle$中**参与人 i 的一个混合战略**(a mixed strategy of player i)是参与人 i 纯战略集合上的一个概率测度。**参与人 i 的一个行为战略**(a behavioral strategy of player i)是一个独立的概率测度族$(\beta_i(I_i))_{I_i\in\mathcal{I}_i}$,这里 $\beta_i(I_i)$是 $A(I_i)$上的一个概率测度。

对任一段历史 $h\in I_i\in\mathcal{I}_i$ 和任一行动$a\in A(h)$我们用 $\beta_i(h)(a)$表示由 $\beta_i(I_i)$赋给行动 a 的概率$\beta_i(I_i)(a)$。

因此像在战略博弈中一样,参与人 i 的一个混合战略是参与人i 的纯战略集合上的一个概率测度。相反,一个行为战略确定了一个对关于参与人 i 在她的每个信息集合上可行行动的概率测度。两个概念反应了参与人可能随机化的两种方法:他可以随机地选择一个纯战略;或者他可以计划一个随机化集合,对于每个他得采取行动的时点都有一个。这两个概念间的差异可通过检验图 202.1 中的博弈来体会。在此博弈中参与人 1 有两个信息集合,在每一个信息集合中她有两个可能的行动。因此她有四个纯战略,它们分别将行动 L 和 ℓ, L 和 r, R 和 ℓ, R 和 r 赋给信息集合$\{\phi\}$和$\{(L,A),(L,B)\}$。(如果你不清楚后两个战略,可读(或重读)第 6.1.2 节)参与人 1 的一个混合战略是关于这四个纯战略的一个概率分布。相反,参与人 1 的一个行为战略是一对概率分布,一个对应于一个信息集合;第一个是关于$\{L,R\}$的一个分布且第二个是关于$\{\ell,r\}$的一个分布。

在描述混合或行为战略中我们已经使用了朴素解释依赖于随机因素的行动的语言。参与人根据它有意识地选择一个随机方法(参看第 3.2 节)。在第 3 章讨论混合战略时,我们描述了一些别的解释,它在这儿也有类似情况。例如,我们可以把参与人 i 的混合和行为战略看作描述其他参与人关于参与人i 行动的信念的两个方法。别的参与人可有两种方法组织他们的信念:他们可形成关于参与人 i 在整个博弈中的纯战略的推测(一个混合战略),或者他们可形成关于参与人 i 对每段历史(在其后他得行动)的行动的独立信念的一个集合(一个行为战略)。

对扩展博弈中的任一混合或行为战略组合 $\sigma=(\sigma_i)_{i\in N}$，我们定义 σ 的**结果** $O(\sigma)$ 为关于当每个参与人遵循 σ_i 的规程时所产生的终点历史的概率分布。对于有限博弈这个结果定义如下。对任一历史 $h=(a^1,\cdots,a^k)$ 定义参与人 i 的一个纯战略 s_i 是与 h 一致的，如果对每段满足 $P(a^1,\cdots,a^k)=i$ 的子历史 $(a^1,\cdots,a^\ell)$ 我们有 $s_i(a^1,\cdots,a^\ell)=a^{\ell+1}$。对任一段历史 h 令 $\pi_i(h)$ 为根据 σ_i 参与人 i 的所有与 h 一致的纯战略的概率和。(因此例如 h 是一段参与人 i 永远不动的历史，那么 $\pi_i(h)=1$。)，那么对任一混合战略组合 σ，$O(\sigma)$ 赋给任一终点历史概率为 $\Pi_{i\in N\cup\{c\}}\pi_i(h)$。对任一行为战略的组合 β，$O(\beta)$ 赋给终点历史 $h=(a^1,\cdots,a^K)$ 的概率是 $\Pi_{k=0}^{K-1}\beta_{P(a^1,\cdots,a^k)}(a^1,\cdots,a^k)(a^{k+1})$（这里对 $k=0$ 历史 $(a^1,\cdots,a^k)$ 是初始历史)。

214

任何参与人的两个(混合或行为)战略是**结果等价的**(outcome-equivalent)。如果对别的参与人每个纯战略族两个战略导致相同结果。在本节的剩下篇幅中我们检验对任一混合战略有一结果等价的行为战略的条件及其逆命题。我们要特别证明在任一完全记忆博弈中亦如此。

我们首先证明在一个包含所有那些完全记忆的博弈集合中，对任一行为战略有一结果等价的混合战略。考虑一个扩展博弈，在其中没有信息集合既包含了某段历史 h 又包含了一段形如 (h,h')（对某个 $h'\neq\phi$）的历史。(注意任一完全记忆博弈满足这个条件，它经常作为扩展博弈定义的一部分被包含。)对任一参与人 i 在这种博弈中的一个行为战略 β_i，如下所定义的混合战略是结果等价的：被赋给任一纯战略 s_i 的概率(它对每个信息集合 $I_i\in\mathcal{I}_i$ 确定一个行动 $s_i(I_i)$)是 $\Pi_{I_i\in\mathcal{I}_i}\beta_i(I_i)(s_i(I_i))$。[注意这个混合战略的派生依赖于族 $(\beta_i(I_i))_{I_i\in\mathcal{I}_i}$ 是独立的这一假设。同时要注意在一个某个信息集合包含形如 h 和 (h,h')（$h'\neq\phi$）历史的博弈中，可能有一行为战略，对于它没有等价的混合战略：例如在图 214.1 的博弈中，将概率 $p\in(0,1)$ 赋给 a 的行为战略分别以概率 p^2、$p(1-p)$ 和 $1-p$ 产生结果 (a,a)、(a,b) 和 b，这是个不能被任何混合战略复制的分布]。

我们现在证明，在一个完全记忆博弈中对每个混合战略存在一个结果等价的行为战略。

■**命题 214.1**　对在有限完全记忆扩展博弈中一个参与人的任一混合战略都存在一个结果等价的行为战略。

215

证明：令 σ_i 为参与人 i 的混合战略。同上面一样，对每段历史 h，令 $\pi_i(h)$ 为根据 σ_i 参与人 i 的所有与 h 一致的纯战略概率的和。令 h 和 h' 为在

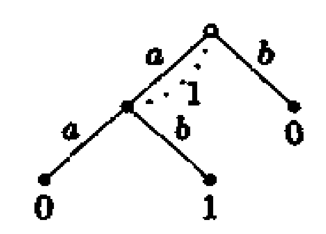


图 214.1　一个一人扩展博弈，其中有一个非结果等价于任何混合战略的行为战略

参与人 i 相同信息集合中的两段历史，且令 $a\in A(h)$，因为博弈有完全记忆，所以参与人 i 在 h 和 h' 中的行动集合是一样的。因此 $\pi_i(h)=\pi_i(h')$。因为在参与人 i 的任何纯战略中，a 在 h 后被采取，当且仅当它不在 h' 后被采用，所以我们也有 $\pi_i(h,a)=\pi_i(h',a)$。因此我们可以通过对任一 $h\in I_i$ 有 $\beta_i(I_i)(a)=\pi_i(h,a)/\pi_i(h)$ 来确定参与人 i 的一个行为战略 β_i，对于它 $\pi_i(h)>0$（显然 $\sum_{a\in A(h)}\beta_i(I_i)(a)=1$）；当 $\pi_i(h)=0$ 时我们如何定义 $\beta_i(I_i)(a)$ 是无关紧要的。

我们认为 β_i 结果等价于 σ_i。令 s_{-i} 为非 i 参与人的纯战略族。令 h 为一终点历史。如果 h 包含了与 s_{-i} 不一致的行动，那么 h 的概率在 σ_i 和 β_i 下是零。现在假定在 h 中非 i 参与人的所有行动与 s_{-i} 一致。如果 h 在 h 的一段子历史 $h'\in I_i$ 之后包含了与 σ_i 不一致的一个行动，那么 $\beta_i(I_i)$ 将概率 0 赋给这个行动，并且根据 β_i，则 h 的概率是零。最后，如果 h 与 σ_i 一致，那么对所有 h 的子历史 h' 有 $\pi_i(h')>0$ 且根据 β_i，则 h 的概率是 $\pi_i(h',a)/\pi_i(h')$ 对所有 h 的子历史 (h',a) 的乘积；这个乘积是 $\pi_i(h)$，它是根据 σ_i 历史 h 的概率。　□

在一个不完全记忆的博弈中可能存在一个没有结果等价行为战略的混合战略，就像图 215.1 所示的不完美记忆单人博弈。考虑混合战略，在其中参与人 1 以概率 1/2 选 LL，以概率 1/2 选 RR。这个战略的结果是终点历史上的概率分布$(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$。这个结果不能由任何行为战略获得：行为战

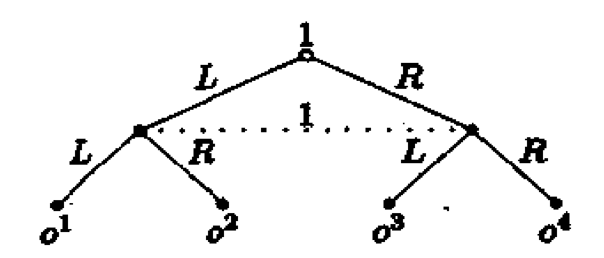


图 215.1　一个混合和行为战略不等价的扩展博弈

略$((p,1-p),(q,1-q))$导致了关于终点历史的一个分布，在其中 LR 有零概率仅当 $p=0$ 或 $q=1$，在此情形中 LL 或 RR 的概率为 0。

☒练习 216.1　考虑图 216.1 中的博弈形式。试找出等价于参与人 1 的下列混合战略的行为战略：以概率 0.4 进行(B,r)，以概率 0.1 进行(B,ℓ)，以概率 0.5 进行(A,ℓ)。 216

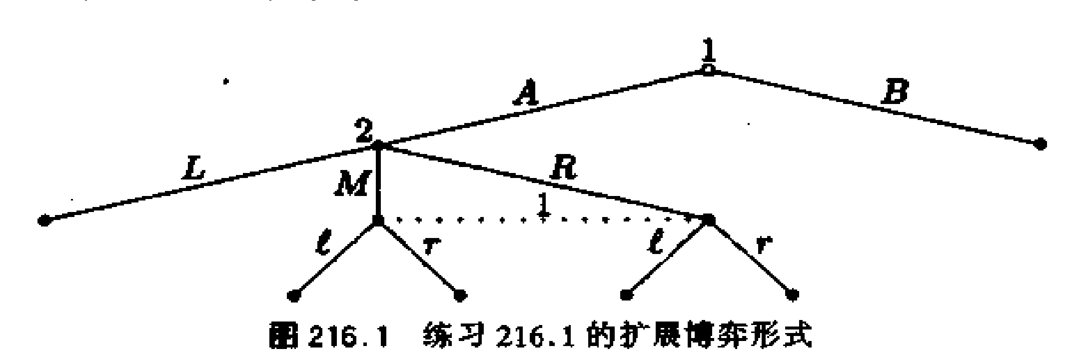


图 216.1　练习 216.1 的扩展博弈形式

11.5　纳什均衡

扩展博弈混合战略中的一个纳什均衡(a Nash equilibrium in mixed strategies)是混合战略的一个组合 σ^*，它的性质是对每个 $i\in N$ 及参与人 i 的每个混合战略 σ_i 我们有

$$O(\sigma^*_{-i},\sigma^*_i)\succsim_i O(\sigma^*_{-i},\sigma_i),$$

对于有限博弈混合战略均衡的一个等价定义是，在每个参与人混合战略支集中的每个纯战略是对别的参与人战略的一个最优反应(参看定义 44.1)。行为战略中的一个纳什均衡(a Nash equilibrium in behavioral strategies)类似定义。

给定命题 214.1，两个定义对完全记忆博弈是等价的。如图 214.1 中的博弈所示，对不完全记忆博弈它们是不等价的。在这个博弈中参与人在所有她的混合战略中是无差别的，它对她产生支付 0，而将概率 p 赋给 a 的行为战略对她产生支付 $p\cdot 0+p\cdot(1-p)\cdot 1+(1-p)^2\cdot 0=p(1-p)$，所以最优行为战略有 $p=1/2$。并且对她产生支付 1/4。

在第 6 章我们证明了纳什均衡概念在完全信息扩展博弈中往往是不令人满意的，并且我们引进了子博弈精炼均衡的概念去处理该问题。将这个

217 概念所含的思想推广到扩展博弈是富于挑战性的，主要是因为当做一个决策时，在一个非单元素信息集合，参与人不得不形成一个关于已发生历史的预期，这个期望也许不能由均衡战略惟一地决定。下一章将对这个问题进行讨论。

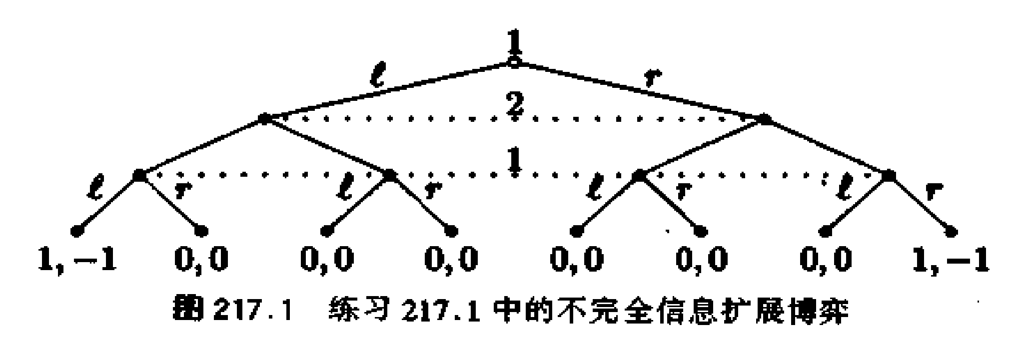


图 217.1 练习 217.1 中的不完全信息扩展博弈

?练习 217.1 考虑图 217.1 中不完全记忆严格竞争扩展博弈。试证明参与人 1 最优的行为战略保证她以概率 1/4 获得支付 1，而有一混合战略保证她以概率 1/2 获得支付 1。

?练习 217.2 令 Γ_2 为一无机会行动的不完全信息扩展博弈，并且假定博弈 Γ_1 不同于 Γ_2 之处仅在于 Γ_2 中参与人 1 的一个信息集合被分割成 Γ_1 中的两个信息集合。试证明在 Γ_2 的纯战略中的所有纳什均衡对应于 Γ_1 的纳什均衡。试证明没有机会行动这一条件对该结论是必需的。

?练习 217.3 试将下列客厅博弈系统表达成一个不完全信息扩展博弈。开始参与人 1 以相等概率得到一张是 H 或 L 的卡片。参与人 2 不看卡片。参与人 1 可能报告她的卡片是 L，在此情形中她必须付 1 元给参与人 2，或者也可报告她的卡片是 H，在此情形中参与人 2 可以选择妥协或坚持看参与人 1 的卡片。如果参与人 2 妥协，他必需付 1 元给参与 1。如果参与人坚持看参与人 1 的卡片则参与人 1：若她的卡片为 L 时必须付 4 美元给参与人 2；若她的卡片为 H 则参与人 2 付，4 美元给他。试找出该博弈的纳什均衡。

[注解]

在本章中所研究的不完全信息扩展博弈模型应归于 Kuhn(1953)。就

像完全和不完全记忆概念一样。第 11.2 节基于 Thompson(1952)；在这节 218
末尾的例子基于 Elmes 和 Reny(1994)中的一个。第 11.3 节中的例子基于 Aumann 和 Maschler(1972)。命题 214.1 应归于 Kuhn(1953)。图 214.1 中的博弈是 Isbell(1957, p.85)中的一个变形。

219 # 第 12 章

序贯均衡

在本章我们将子博弈精炼均衡的概念推广到不完全信息扩展博弈。我们集中精力于序贯均衡的概念并简要地讨论一些它的精炼。

12.1 战略与信念

记得完全信息扩展博弈的子博弈精炼均衡是一战略组合，在参与人遵循他们战略的情况下，不管历史是否发生，每个参与人的战略对于任一段历史（在其后轮着他采取行动）都是最优的，这一思想对不完全信息扩展博弈的自然应用，导致了每个参与人的战略在他的每个信息集合都为最优的要求。

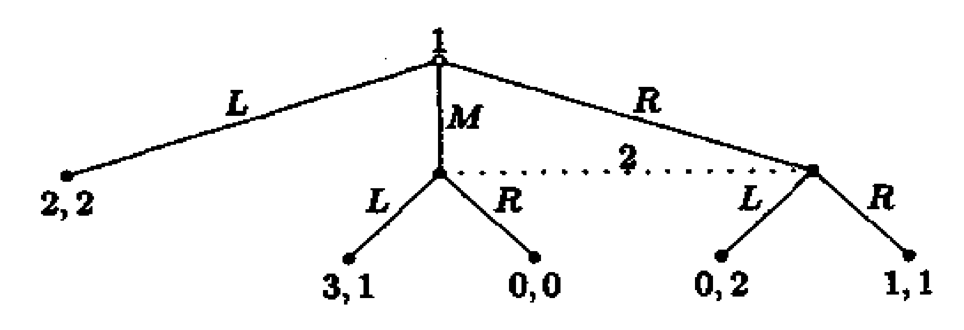


图 219.1 一个不完全信息扩展博弈，其中对每个参与人的战略在每个信息集合上是最优的要求剔除了一个纳什均衡

对于图 219.1 中的博弈这个要求是实质性的。战略二元组 (L, R) 是这个博弈的一个纳什均衡。如果参与人 1 坚持这个均衡，那么参与人 2 的信息集合不能达到。不过，如果因为某种原因参与人 2 的信息集合达到，则 220

无论他认为是什么导致了他必须行动(即，与她的计划相反，参与人1是选M还是选R)，他的行动R都劣于他的行动L。因此对这个博弈，子博弈精炼均衡思想的自然扩展是可预料的：均衡(L, R)不满足这个扩展的条件(而均衡(M, L)满足)。具有这种均衡的博弈是较少的，一个更普遍的情形如图220.1中的博弈所示。在此博弈中战略组合(L, R)也是参与人2的信息集合未达到的一个纳什均衡，但在此情形下参与人2在他的信息集合达到的事件中的最优行动，依赖于他关于已发生历史的信念。如果将至少1/2概率赋于给这段历史，则行动L是最优的。因此他的最优行动依赖于他不得不行动的原因解释。他的信念不能派生于均衡战略。因为这个战略将零概率赋给他已达到的信息集合。

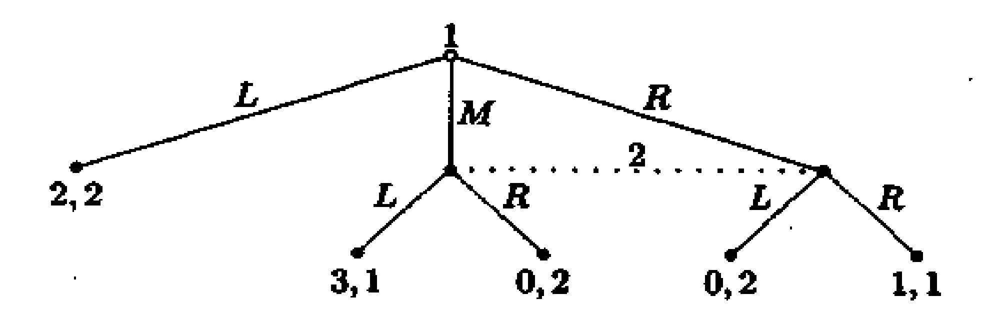


图220.1　一个不完全信息扩展博弈，它有一未被子博弈精炼均衡概念之后的思想的实施所排除的纳什均衡

至此我们已研究的扩展博弈解有惟一成分：战略组合。我们现在研究一个解——序贯均衡——它既包含了一个战略组合又包含了一个信念系统，这里一个信念系统对每个信息集合确定了由在那个关于已发生历史信息集合中不得不行动的参与人所持的信念。给定我们关于子博弈精炼均衡的解释(见第6.4节)，将信念系统作为均衡的部分包含进来是很自然的，当讨论这个均衡概念时我们将证明：为了完满地描述参与人关于博弈的推理，我们不得不确定他们关于在若参与人坚持他们的计划则不会发生的历史之后所采取的行动的期望，同时这些期望应与理性一致。特别地，我们将在与战略不一致的历史之后确定行动的战略成分解释为关于在这些未预测到的事件中将发生什么的信念。在不完全信息博弈中，关于未预期到的事件的信念既包括关于将来的信念又包括关于过去的信念。

221

总而言之，在序贯均衡概念之后的基本思想是：均衡不仅应确定参与人的战略，也要确定他们在每个集合中关于已发生历史的信念。我们称这样一个二元组为一状态(assessment)。也就是，一个状态包括(ⅰ)行为战略的一个组合和(ⅱ)包含一个概率测度族的一个信念系统，每个信息集合有一

个。(注意状态的概念,是与完全信息扩展博弈战略组合的概念相一致的,因为在这样一个博弈中所有信息集合都是单元素集且因此有惟一的可能(退化的)信念系统。)

在子博弈精炼均衡中每个参与人的战略在每段历史之后都是最优的这一要求的推广如下,我们称之为序贯理性(sequential rationality):对参与人 i 的每个信息集合,在给定参与人 i 在那个信息集合中的信念情况下,参与人 i 的(行为)战略是对别的参与人战略的一个最优反应。

至此我们对参与人的信念未加任何限制。在经典文献讨论的几类附加的约束条件如下:

与战略的一致性(Cositency with Strategies)在纳什均衡的精神中,我们应要求在下列意义下信念与战略组合一致:在任一与参与人的战略相一致的信息集合中关于已发生历史的信念应该派生于使用贝叶斯(Bayes)法则的战略。例如在图 220.1 的博弈中,我们不想(M, L)成为由参与人 2 这样的信念支持的一个解,即导致他的信息集合的历史是 R。如果参与人 1 的战略与她选择 M 或 R 相一致(即,她的战略赋正概率给这些选择中的至少一个),那么我们想要求参与人 2 关于历史 M 已发生的信念派生于参与人 1 合用 Bayes 法则的战略。也就是,参与人 2 应该给这个事件赋概率 $\beta_1(\phi)(M)/(\beta_1(\phi)(M)+\beta_1(\phi)(R))$(这里 β_1 是参与人 1 的行为战略)。

222 结构一致性(Structural Consistency) 即使在一个未达到的信息集合中,如果所有参与人坚持他们的战略,那么我们也可希望要求参与人的信念派生于某个(可选择的)使用 Bayes 法则的战略组合。(这个对信息的约束被称为"结构的",因为它不依赖于参与人的支付或均衡战略。)

共同信念(Conmon Beliefs) 博弈论解的概念要求所有的不对称性包括在博弈的描述中;每个参与人被假设为用相同的方法分析情形。在子博弈精炼均衡的背景中,这导致了(内含的)条件:如果一个没预测到的事件发生,那么所有参与人关于某个参与人 i 的计划的信念是一样的。在当前背景下它导致了条件:所有参与人具有相同的关于任一未预测到的事件的信念。

对一些博弈类型,这三个条件的正式表达是没有疑问的,尽管约束条件的合理性仍在争议中。一个例子是这样一类博弈,即第一个行动由机会进行(对于它,参与人可能非对称地知道),随后每个参与人知道每个别的参与人的行动。不过,如我们将看到的,对任意博弈,即使约束的表达也有困难。使用最广泛的系统表达是序贯均衡的表达,在下一节我们将定义它。这个概念经常留有很大的自由度,并且经常与一个大的结果集合相一致,这一事实已激励博弈论者对信念附加约束。在后面的部分中我们将简要地讨论一

些这种约束。

12.2 序贯均衡

从始至终我们将注意力限于完全记忆博弈(参看定义 203.3),其中每个信息集合包含有限多的历史。如我们上面讨论的,这样一个博弈的序贯均衡的一个候选者是一状态,其如下正式定义。

▶定义 222.1 在扩展博弈中一个**状态**(assessment)是一个二元组(β,μ),这里 β 是一个行为战略组合,μ 是一个函数,它给每个信息集合赋在那个信息集合中的历史集合上的一个概率测度。

令(β,μ)为 $\Gamma=\langle N,H,P,f_c,(\mathcal{I}_i),(\succsim_i)\rangle$ 中的一个状态。μ 的解释是(我们称 μ 为一个**信念系统**:$\mu(I)(h)$是以正在达到的 I 为条件参与人 $P(I)$赋给 $h\in I$ 的概率。 223

一个状态是**序贯理性的**(sequentially rational),如果对每个参与人 i 和每个信息集合 $I_i\in\mathcal{I}_i$ 参与人 i 的战略在给定参与人 i 在 I_i 中的信念条件下是对别的参与人战略的一个最优反应。为了更正式地描述这个条件,如下定义(β,μ)**以 I 为条件的结果**$O(\beta,\mu|I)$(outcome $O(\beta,\mu|I)$ *of* (β,μ) conditional on I)为关于以正在达到的以 I 为条件由 β 和 μ 决定的终点历史的分布。令 $h^*=(a^1,\cdots,a^K)$为一终点历史。那么:

- $O(\beta,\mu|I)(h^*)=0$ 如果在 I 中没有 h^* 的子历史(即博弈已达到的信息排除 h^*)
- $O(\beta,\mu|I)(h^*)=\mu(I)(h)\cdot\prod_{k=L}^{K-1}\beta_{P(a^1,\cdots,a^k)}(a^1,\cdots,a^k)(a^{k+1})$ 如果 h^* 的子历史 $h=(a^1,\cdots,a^L)$在 I 中,这里 $L<K$。

(如果 I 是包含初始历史的信息集合,那么 $O(\beta,\mu|I)$恰好是在第 11.4 节所定义的结果 $O(\beta)$。)注意完全记忆的假设蕴含了在 I 中至多有一个 h^* 的子历史。同时也要注意采取第二个情形中乘积的理论根据是由完全记忆历史$(a^1,\cdots,a^k)(k=L,\cdots,K-1)$在不同的信息集合中,并且因此对 $k=L\cdots,K-1$ 事件$\{a^{k+1}$以$(a^1,\cdots,a^k)$发生为条件紧随$(a^1,\cdots,a^k)\}$是独立的。

在第一眼看来 $O(\beta,\mu|I)$的这个定义是自然的,而在这样的博弈中有不合要求的特征,即有两个信息集合 I 和I'并且历史$h\in I$ 和$h'\in I'$具有性

质：h 的一段子历史在 I' 中，h' 的一段子历史在 I 中。下列的例子表明了这点。

◇例 223.1　考虑图 224.1 所示的博弈形式。（像在这里，我们有时用一个小圆圈而非一个小圆点表示初始历史。这个例子中与每个这样的圈相邻的数字是由机会在初始历史赋给它的一个行动的概率。）在状态 (β, μ)（其中 $\beta_1 = \beta_3 = Out$）中参与人 2 的信息集合未达到；如果他被号召去行动，那么一个未预料到的事件一定发生了。假设他在他信息集合 I 中的信念满足 $\mu(I)(A, C) > 0$ 和 $\mu(I)(B, C) > 0$。在决定 I 被达到的事件中所采取的行动时他必须计算 $O(\beta, \mu | I)$。上面所给的这个分布的定义假设他继续持有关于从 β 派生的参与人 1 和 3 的行动的期望。不过，任何一个产生 224 信念 $\mu(I)$ 的战略组合必须不同于 β：它必须赋正概率给参与人 1 和 3 选 C。那即是，如果他的信念派生一个可选择的战略组合，那么他关于过去的解释是与他关于未来的期望不一致的。

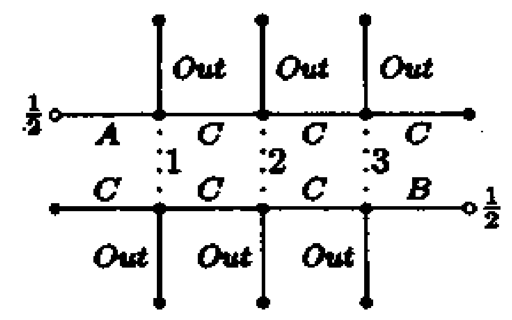


图 224.1　例 223.1 中的博弈形式。（博弈以一个机会行动开始，在其中 A 和 B 都以概率 1/2 被选择

这个例子说明了一个合理的对于下列博弈的子博弈精炼均衡概念扩展的复杂性：在此博弈中，一个信息集合既可在另一个集合之前也可在其之后发生。我们现在提供的序贯均衡的定义涵盖了这种博弈，但是如例子所表明的，在它们中可能缺乏吸引力。我们以序贯理性的一个正式定义开始。

▶定义 224.1　令 $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (\mathcal{I}_i), (\succsim_i) \rangle$ 为一完全记忆扩展博弈。状态 (β, μ) 是**序贯理性的**（sequentially rational）如果对每个参与人 $i \in N$ 和每个信息集合 $I_i \in \mathcal{I}_i$ 我们有

$$O(\beta, \mu | I_i) \succsim_i O((\beta_{-i}, \beta'_i), \mu | I_i),$$

对每个参与人 i 的每个战略 β'_i。

下列定义目的在于抓住一些对在前面部分所讨论的信念的约束。定义

一个行为战略组合是**完全混合的**(completely mixed)如果它在每个信息集合将正概率赋给每个行动。

▶定义 224.2　令 $\Gamma=\langle N,H,P,f_c,(\mathcal{I}_i),(\succsim_i)\rangle$ 为一完全记忆扩展博弈。状态 (β,μ) 是**一致的**(consistent)如果在欧氏空间中有一收敛到 (β,μ) 的状态序列 $((\beta^n,\mu^n))_{n=1}^{\infty}$,它的性质是:每个战略组合 β^n 是完全混合的并且每个信念系统 μ^n 用 Bayes 法则派生于 β^n。

在这个条件之后的思想是,以零概率事件为条件的事件概率,必须接近派生于将正概率赋给每个行动的战略的概率。我们并没发现这个一致性条件是自然的,因为它是用极限来描述的;它似乎是一个很不透明的技术假设。引用 Kreps(1990a, p. 430)"太多的实体放在这个定义中"。隐含于这个定义的假设对我们来说是不清楚的,尽管我们将看到该定义确定抓住了一些我们可能希望强加给状态的吸引人的要求。 225

▶定义 225.1　完全记忆有限扩展博弈的一个状态是**序贯均衡**(sequential equilibrium)如果它是序贯理性的且是一致的。

后面(命题 249.1)我们要证明每一个完全记忆有限扩展博弈都有一个序贯均衡。显然若 (β,μ) 是序贯均衡 β 是纳什均衡。进一步来说,在一个完全信息扩展博弈中 (β,μ) 是一个序贯均衡当且仅当 β 是一个子博弈精炼均衡。

再一次考虑图 220.1 中的博弈。状态 (β,μ),在其中 $\beta_1=L,\beta_2=R$ 且对任一 $\alpha\in[0,1]$ 有 $\mu(\{M,R\})(M)=\alpha$,它是一致的,因为它是状态 $(\beta^\epsilon,\mu^\epsilon)$ 在 $\epsilon\to 0$ 时的极限,这里 $\beta_1^\epsilon=(1-\epsilon,\alpha\epsilon,(1-\alpha)\epsilon)$,$\beta_2^\epsilon=(\epsilon,1-\epsilon)$ 且对每个 ϵ 有 $\mu^\epsilon(\{M,R\})(M)=\alpha$。对 $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$ 这个状态也是序贯理性的,所以它是一个序贯均衡。

▶例 225.2　(Selten 的马)图 225.1 中的博弈有两类纳什均衡:一类是在其中 $\beta_1(\phi)(D)=1,\frac{1}{3}\leqslant\beta_2(C)(c)\leqslant 1$,和 $\beta_3(I)(L)=1$;另一类是在其中 $\beta_1(\phi)(C)=1,\beta_2(C)(c)=1$ 和 $\frac{3}{4}\leqslant\beta_3(I)(R)\leqslant 1$(这里 $I=\{(D),(C,d)\}$ 是参与人 3 的信息集合)。第一类的纳什均衡不是任何序贯均衡的成分,因为在参与人 2 的(单元素集)信息集合中相关估计违背了序贯理性。 226

对第二类的每个纳什均衡 β 都有一个序贯均衡(β,μ)，其中 $\mu(I)(D)=\frac{1}{3}$。(为证明一致性，考虑战略组合序列(β^{ϵ})，其中 $\beta_1^{\epsilon}(\phi)(C)=1-\epsilon$，$\beta_2^{\epsilon}(C)(c)=1-2\epsilon$ 且 $\beta_3^{\epsilon}(I)(R)=\beta_3(I)(R)-\epsilon$。)

?练习 226.1 试找出图 226.1 中博弈的序贯均衡集合。

下列例子表明序贯均衡的概念对在第 11.2 节中所考虑的联合行动原则并不是不变的，这个原则似乎非常合理。

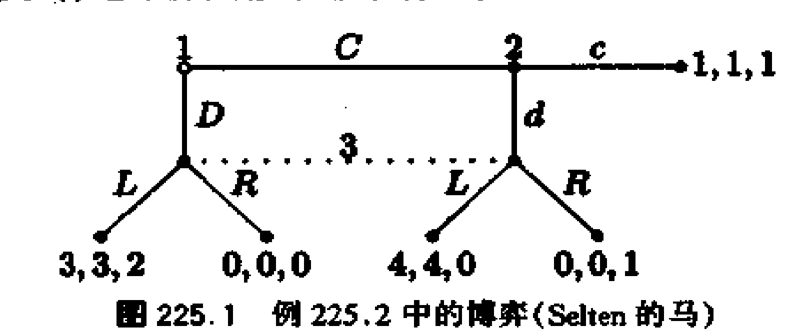


图 225.1 例 225.2 中的博弈(Selten 的马)

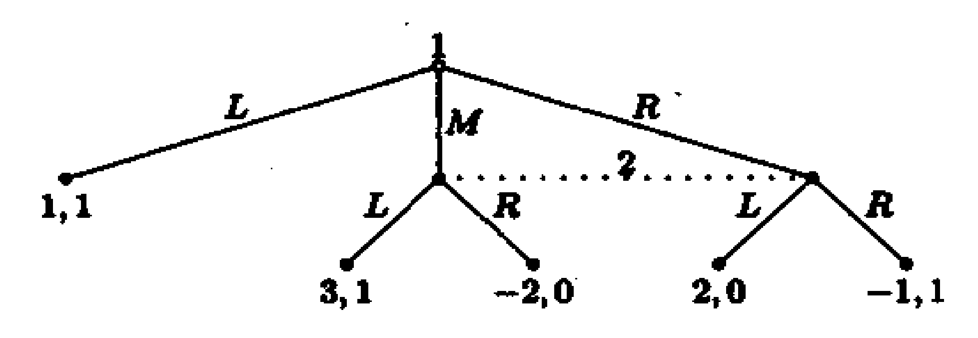


图 226.1 练习 226.1 中的博弈

◇例 226.2 考虑图 227.1 中的博弈。顶部的博弈(Γ_1)是由底部的 Γ_2 通过联合参与人 1 的行动得到的。在 Γ_1 中状态(β,μ)是一序贯均衡，其中 $\beta_1=L$，$\beta_2=L$ 且$\mu(\{M,R\})(R)=0$(为了证明一致性可考虑序列(β^{ϵ})，其中 $\beta_1^{\epsilon}(\phi)=(1-\epsilon-\epsilon^2,\epsilon,\epsilon^2)$，$\beta_2^{\epsilon}(\{M,R\})=(1-\epsilon,\epsilon)$。)这个均衡产生支付组合(3,3)。另一方面，在 Γ_2 的任一序贯均衡中由序贯理性(因为 R 优于 L)参与人 1 在她第二个信息集合中的行动是 R。这样在任一一致的状态中，参与人 2 的信念 $\mu\{(C,L),(C,R)\}$赋概率 1 给(C,R)，在此情形中参与人 2 必须选 R。因此 $\beta_1=(C,R)$是参与人 1 惟一的均衡战略。所以 Γ_2 中惟一的序贯均衡支付是(5,1)。

两个博弈间重大的差异是在 Γ_2 中参与人 2 的信念基于下列假设：在参与人 1 的第二个信息集合中，行动 L 和 R 的相对似然是由参与人 1 的理性

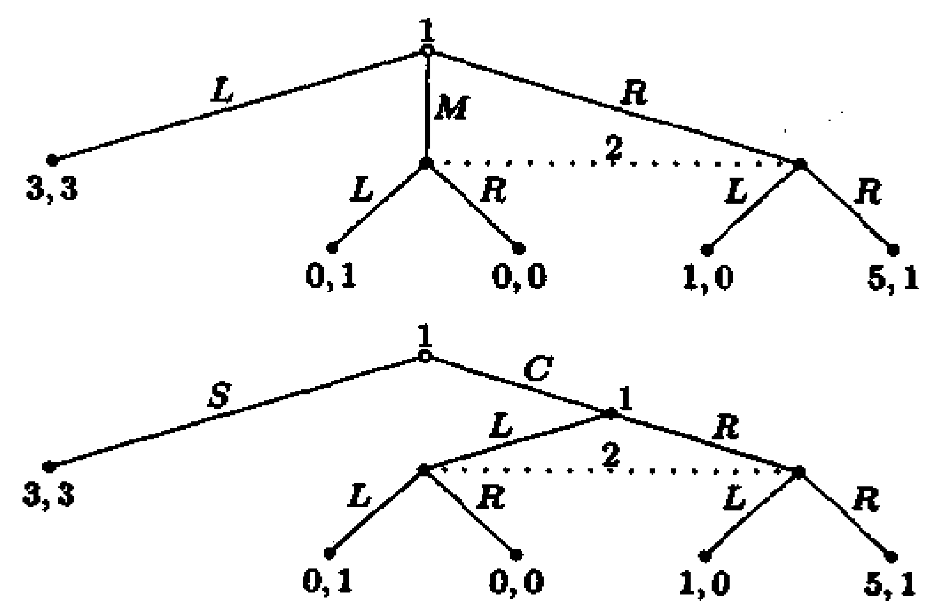


图 227.1　两个相似的博弈。顶部的博弈 Γ_1 是由底部的博弈通过联合参与人 1 的行动得到的

选择的结果，而参与人 2 在 Γ_1 中关于 M 和 R 的相对概率不受参与人 1 任一选择的约束。在第 6.4 节我们已证明了在一些博弈中参与人的战略不仅是行动计划，还是别的参与人关于他在他没有遵从这一计划的事件中的行动信念的一个具体化。在 Γ_2 中参与人 1 的战略有这个作用——它确定了参与人 2 关于参与人 1 在她以选 C 开始时选 L 和 R 的相对概率的信念——而在 Γ_1 中参与人 1 的战略仅描述了她的行动，并没有给出任何相对于别的选择的概率。 227

下列的练习将一个完全信息扩展博弈的子博弈精炼均衡的一次偏离性质（引理 98.2）扩展到不完全扩展博弈序贯均衡。

?练习 227.1　（序贯均衡的一次偏离性质）令 (β,μ) 为在有限完全记忆扩展博弈中的一个一致性状态且令 β'_i 为参与人 i 的一个战略；记 $\beta'=(\beta_{-i},\beta'_i)$。试证明：如果 I_i 和 I'_i 是参与人的信息集合，其性质为 I'_i 包括了有 I_i 中子历史的历史。那么对任一段有 I'_i 中一段子历史的终点历史 h 有 $O(\beta',\mu|I_i)(h)=O(\beta',\mu|I'_i)(h)\cdot\Pr(\beta',\mu|I_i)(I'_i)$，这里 $\Pr(\beta',\mu|I_i)(I'_i)$ 是在给定 I_i 被达到的条件下 I'_i 被达到的概率（根据 (β',μ)）。利用这一事实去证明：(β,μ) 是序贯理性的，当且仅当没有参与人 i 有这样的信息集合 I_i，即 $\beta_i(I_i)$ 中的一个变化（保持 β_i 的剩余部分不变）增加他以达到 I_i 为条件的期望支付。

在第 12.1 节我们讨论了与状态中的信念和战略相关的三个条件。这 228

其中的一个是结构一致性，它可被如下正式地定义。

▶定义 228.1　在完全记忆扩展博弈中信念系统 μ 是结构一致的(structually consistent)，如果对每个信息集合 I 存在一个具有下列性质的战略组合 β：应用 Bayes 法则在 β 和 $\mu(I)$ 下以正概率达到的 I 派生于 β。

(注意不同的战略组合可能证明不同信息集合中的信息系统 μ 是结构一致的)。

在很多博弈中，对任何一个一致性的(在定义 224.2 的意义下)状态 (β,μ)，信念系统 μ 是结构一致的。不过，下列的例子证明了在一些博弈中存在 μ 不是结构一致的一致状态 (β,μ)(实际上，甚至是序贯均衡)：信念不能派生于任一可替代的战略组合。

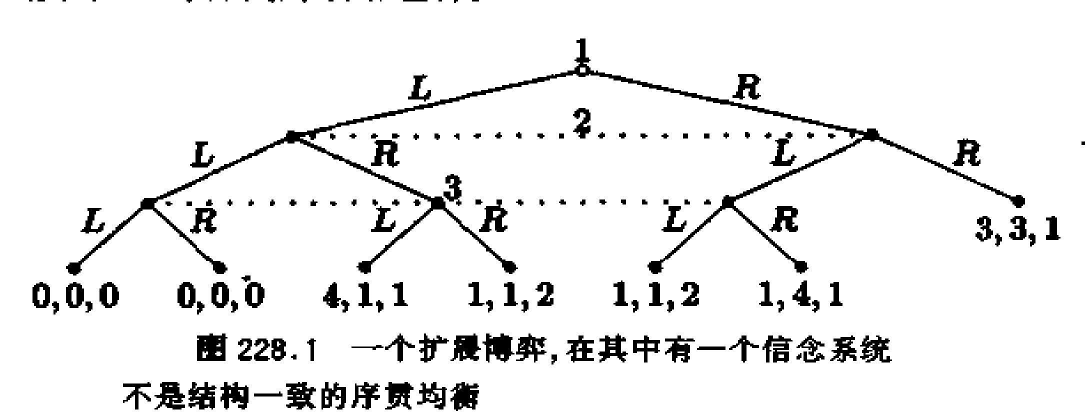


图 228.1　一个扩展博弈，在其中有一个信念系统不是结构一致的序贯均衡

◇例 228.2　在图 228.1 的博弈中有惟一的纳什均衡结果，在其中参与人 1 和 2 选 R。为说明之，假设相反参与人 3 的信息集合以正概率达到，令所有使用的战略组合为 β 且对 $i=1,2,3$，令 $\beta_i(I_i)(R)=\alpha_i$，这里 I_i 是参与人 i 惟一的信息集合。

a. 如果 $\alpha_3\leqslant\frac{1}{2}$，那么 L 产生参与人 2 的一个支付 $\alpha_1(1+3\alpha_3)\leqslant\frac{5}{2}\alpha_1<1+2\alpha_1$，他的支付给 R。因此参与人 2 选 R。但接着 $\mu(I_3)((L,R))=1$，因此参与人 3 以概率 1 选 R，这与 $\alpha_3\leqslant\frac{1}{2}$ 矛盾。

b. 如果 $\alpha_3\geqslant\frac{1}{2}$，那么 L 产生参与人 1 的一个支付 $\alpha_2(4-3\alpha_3)\leqslant\frac{5}{2}\alpha_2<1+2\alpha_2$，她的支付给 R。因此参与人 1 选 R。现在如果参与人 2 以正概率选 L 那么 $\mu(I_3)((R,L))=1$，因此参与人 3 以概率 1 选 L，这与 $\alpha_3\geqslant\frac{1}{2}$ 相矛盾。所以参与人 2 以概率 1 选 R，这与我们的下列假设相矛盾：参与人

229

3 的信息集合以正概率达到。

故在任一纳什均衡中 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$；并且我们需要 $\alpha_3 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$，否则参与人 1 或 2 能有利地偏离。令 β 为这样一个均衡。为了使状态(β, μ)为序贯理性的，参与人 3 的信念 $\mu(I_3)$必须赋同等概率给历史(L, R)和(R, L)，因此必须采取形式$(1-2\gamma, \gamma, \gamma)$；一个 $\mu(I_3)$采取这个形式的状态是一致的当且仅当 $\gamma = \frac{1}{2}$。（对 $\gamma = \frac{1}{2}$ 表明一致性的一个战略组合序列是(β^ϵ)，在其中 $\beta^\epsilon \in_1(I_1)(R) = \beta_2^\epsilon(I_2)(R) = 1-\epsilon$ 并且 $\beta_3^\epsilon(I_3)(R) = \alpha_3$。）可是，参与人 3 的信念$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$违背了结构一致性，因为任一以零概率产生$(L, L)$的战略组合也以零概率产生$(L, R)$或$(R, L)$。

? 练习 229.1　考虑图 229.1 中的博弈。像在图 224.1 中的博弈一样，第一个行动由机会进行，并且信息集合没排序（依赖于机会的行动，参与人 1 的信息集合既可在参与人 3 的信息集合之前也可在其后）。试证明在纯战略中该博弈有三个序贯均衡，在其中一个参与人 1 和 3 都选 S。试讨论这些序贯均衡的合理性。

下一个例子进一步阐明了一致性与结构一致性的关系。它表明了一个序贯理性的状态(β, μ)（其中 μ 是结构一致的）不可能是一致的（并且因此不可能是一个序贯均衡。）

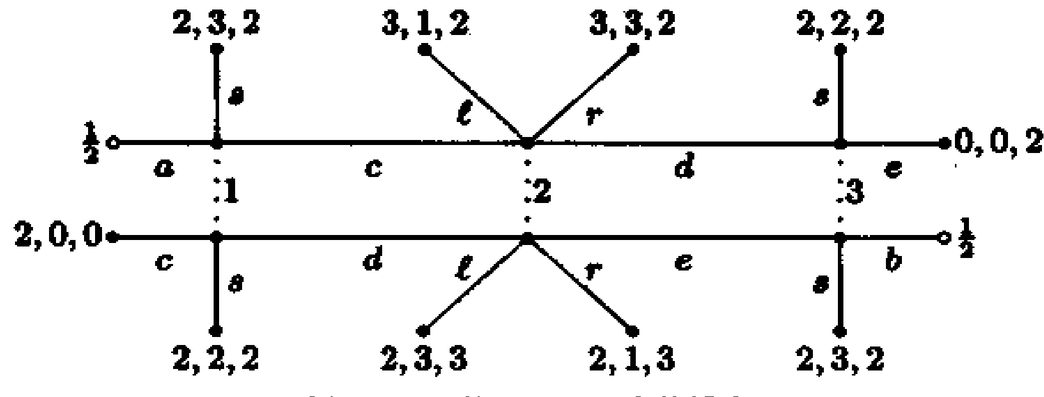


图 229.1　练习 229.1 中的博弈

◇例 229.2　在图 230.1 的博弈中状态(β, μ)是序贯理性的，在其中 β 是纯战略组合(R, S, R)。参与人 2 的信念赋概率 1 给历史 R，且参与人 3 的信念赋概率 1 给历史(L, C)。进一步而言，信念 μ 是结构一致的：特别 230 地，参与人 3 的信念由可选择的纯战略组合支持，在此战略组合中参与人 1 选 L 且参与人 2 选 C。即，如果参与人 3 不得不行动那么她相信参与人 1 和参与人 2 一样会从她的均衡战略偏离。为了使她不得不行动理性化对于

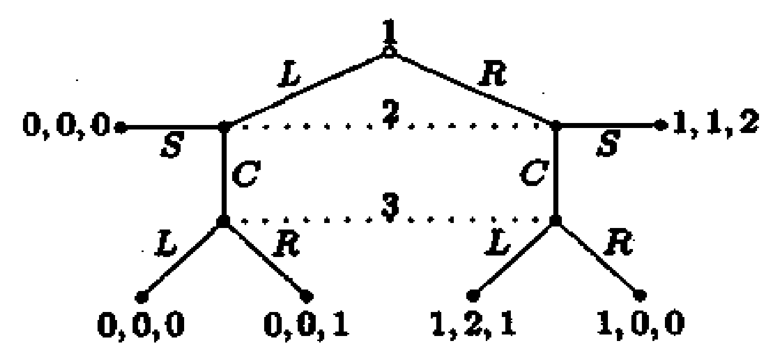


图 230.1 一个扩展博弈，在其中存在一具有结构一致性的信念的序贯理性的状态不是序贯均衡

她来说相信参与人 2 偏离就足够了，实际上她知道他这样做了，因此结构一致性允许参与人 3 修改她的关于参与人 1 的信念，即使她仅有的证据是参与人 2 偏离了，这足够去解释已发生的一切。

这些结构一致的信念并非一致的：每个涉及完全混合且收敛到 β 的战略的状态序列产生参与人 3 的信念，这些信念收敛到将概率 1 赋给历史 (R, C) 的信念（而 μ 赋概率 1 给 (L, C)）。因此 (β, μ) 不是一个序贯均衡。（在博弈的惟一序贯均衡中战略组合是 (R, C, L)，参与人 2 的信念将概率 1 赋给 R，参与人 3 的信念将概率 1 赋给 (R, C)。）

下一个例子阐明了一致性会是多么微妙。

◇例 230.1 考虑一个两阶段三人博弈，其中在第一阶段参与人 1 和 2 同时从集合 $\{L, M, R\}$ 选择，在第二阶段参与人 3 找出有多少参与人选 R 和多少参与人选 L。在这个博弈中参与人 3 有六个信息集合（例如 $\{(M, M)\}$——这是她知道两个参与人选 M 的情形，——和 $\{(R, L)(L, R)\}$——这是她知道一个参与人选 R 和另一个参与人选 L 的情形）。

231

如果参与人 1 和 2 的战略要求他们选择同一行动，但如果在实际上他们选择了不同行动，那么参与人 3 不得不形成一个关于由他们中每个所选行动的信念。第一眼看来似乎序贯均衡的概念并没约束这些信念。例如考虑一个状态 (β, μ)，在其中所有三个信念 $\mu(\{(M, L), (L, M)\})(M, L)$，$\mu(\{(L, R), (R, L)\})(L, R)$ 和 $\mu(\{(M, R), (R, M)\})(R, M)$ 都等于 2/3。这些信念显然是结构一致的（记得一个不同的战略组合能支持在每个信息集合上的信念）。不过，一致性要求每个信息集合上的信念由同一个战略组合序列证明为合理的这一事实蕴含了 (β, μ) 不是一致的，就像下列证明表示的一样。

对于 (β, μ) 为一致的，则一定有某个序列 (β^ϵ)，对于它 $\beta_1^\epsilon(M)\beta_2^\epsilon(L)/\beta_1^\epsilon(L)\beta_2^\epsilon(M)$，$\beta_1^\epsilon(L)\beta_2^\epsilon(R)/\beta_1^\epsilon(R)\beta_2^\epsilon(L)$，和 $\beta_1^\epsilon(R)\beta_2^\epsilon(M)/$

$\beta_1^\epsilon(M)\beta_2^\epsilon(R)$当$\epsilon \to 0$时的极限都是2(这里$\beta_i^\epsilon(a)$是对$\beta_i^\epsilon(\phi)(a)$的一个简写)。但这三个比率的乘积是1且与$\epsilon$独立,而它们极限的乘积是8,因此一致性排除了信念系统μ(不管β)。

12.3 可观察的行动博弈、精炼贝叶斯均衡

我们现在考察一类博弈,在其中我们可定义一个与序贯均衡紧密相关但更简单的均衡概念。*贝叶斯可观察的行动扩展博弈*概念模化了一种每个参与人看得见所有别的参与人行动的情形;惟一的不确定性是关于机会初始行动,它在参与人之间按下列方法分配与支付相关的个人信息:被每个参与人收到的信息不提示任何关于任一别的参与人的信息。我们说机会为参与人选择类型并且称收到信息θ_i后的参与人i为类型θ_i。正式定义如下。

▶定义231.1 **一个贝叶斯可观察行动的扩展博弈**(a Bayesian extensive game with observable actions)是一四元组$\langle \Gamma, (\Theta_i), (p_i), (u_i)\rangle$,这里

• $\Gamma = \langle N, H, P\rangle$是一完全信息和同时行动扩展博弈形式并且对每个参与人$i \in N$

• Θ_i是一有限集合(参与人i的可能类型(type)集合);我们写作$\Theta = \times_{i\in N}\Theta_i$。

• p_i是Θ_i上的一概率测度,对所有$\theta_i \in \Theta_i$有$p_i(\theta_i) > 0$,并且测度p_i 232 是随机地、独立的($p_i(\theta_i)$是参与人i被选为类型θ_i的概率)

• $u_i: \Theta \times Z \to \mathbb{R}$是一个v—n—m效用函数($u_i(\theta, h)$是当类型组合为$\theta$和$\Gamma$的终点历史为$h$时参与人1的支付)。

这样一种博弈所模化的情形是机会选择参与人的类型,它随后在所有以前采取的行动的所有时点上是完全可知的。我们可将任一这种博弈与一历史集合$\{\phi\} \cup (\Theta \times H)$和每个参与人$i$的每个信息集合采取形式$I(\theta_i, h) = \{((\theta_i, \theta'_{-i}), h): \theta'_{-i} \in \Theta_{-i}\}$,$(i \in P(h), \theta_i \in \Theta_i)$的扩展博弈相联系,所以在$I(\theta_i, h)$中历史的数量是$\Theta_{-i}$元素的数量。

这样一种博弈均衡的一个候选者都是二元组$((\sigma_i), (\mu_i)) = ((\sigma_i(\theta_i))_{i\in N, \theta_i \in \Theta_i}, (\mu_i(h))_{i\in N, h\in H\setminus Z})$,这里每个$\sigma_i(\theta_i)$是在$\Gamma$中参与人$i$的一个行为战略)(由类型为$\theta_i$的参与人$i$所采用的战略)并且每个$\mu_i(h)$是

233 Θ_i 上的一个概率测度(在历史 h 之后所有非 i 参与人关于参与人 i 类型的共同信念)。这样一个二元组是与一状态紧密相关的。组合(σ_i)是在相联系的扩展博弈中对在一个行为战略组合中的信念的一个重新表述;组合(μ_i)概括了参与人的信念并且对下列假设是简单明了的:每个参与人完全知道别的参与人的先前行动并且仅仅不确定别的参与人的类型。

令 s 为 Γ 中行为战略的一个组合。定义 $O_h(s)$为在给定历史 h 已发生的条件下由 s 所产生的在终点历史集合上的概率测度(参看第 6.2 节)。定义 $O(\sigma_{-i}, s_i, \mu_{-i} | h)$为在给定参与人 i 在 Γ 中使用战略 s_i 的条件下在 Γ 的终点历史集合上的概率测度,每个类型为 θ_j 的每个参与人 j 使用战略 $\sigma_j(\theta_j)$,博弈已达到 h,并且 i 赋给 θ_{-i}的概率派生于 $\mu_{-i}(h)$。也就是,$O(\sigma_{-i}, s_i, \mu_{-i} | h)$是对每个 $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$不确定事件 $O_h((\sigma_j(\theta_j))_{j \in N \setminus \{i\}}, s_i)$的概率是$\Pi_{j \in N \setminus \{i\}} \mu_j(h)(\theta_j)$的复合不确定事件。

我们定义的解的概念如下。

▶定义 232.1　令$\langle \Gamma, (\Theta_i), (p_i), (u_i) \rangle$为一贝叶斯可观察的行动扩展博弈,这里 $\Gamma = \langle N, H, P \rangle$。一个二元组$((\sigma_i), (\mu_i)) = ((\sigma_i(\theta_i))_{i \in N, \theta_i \in \Theta_i}, (\mu_i(h))_{i \in N, h \in H \setminus Z})$,这里 $\sigma_i(\theta_i)$是在 Γ 中参与人 i 的一个行为战略并且 $\mu_i(h)$是 Θ_i 上的一个概率测度,是该博弈的一**精炼贝叶斯均衡**如果下列条件被满足。

序贯理性(Sequential rationality)对每一段非终点历史 $h \in H \setminus Z$,每个参与人 $i \in P(h)$和每个 $\theta_i \in \Theta_i$,概率测度 $O(\sigma_{-i}, \sigma_i(\theta_i), \mu_{-i} | h)$对类型 θ_i 至少与对在 Γ 中参与人 i 的任一战略 s_i 的 $O(\sigma_{-i}, s_i, \mu_{-i} | h)$一样好。

正确初始信念(Correct initial beliefs)对每个 $i \in N$ 有 $\mu_i(\phi) = p_i$。

行动确定的信念(Action-determined beliefs)如果 $i \notin P(h)$且 $a \in A(h)$那么 $\mu_i(h, a) = \mu_i(h)$;如果 $i \in P(h)$, $a \in A(h)$, $a' \in A(h)$且 $a_i = a'_i$ 那么 $\mu_i(h, a) = \mu_i(h, a')$。

贝叶斯更新(Bayesian updating)如果 $i \in P(h)$且 a_i 在$\sigma_i(\theta_i)(h)$的支集中(对在 $\mu_i(h)$支集中的某个 θ_i),那么对任一 $\theta'_i \in \Theta_i$ 我们有

$$\mu_i(h, a)(\theta'_i) = \frac{\sigma_i(\theta'_i)(h)(a_i) \cdot \mu_i(h)(\theta'_i)}{\sum_{\theta_i \in \Theta_i} \sigma_i(\theta_i)(h)(a_i) \cdot \mu_i(h)(\theta_i)}.$$

这个定义中的条件很容易解释。第一个条件要求每个参与人每个类型 θ_i 的战略$\sigma_i(\theta_i)$对类型 θ_i 在每个事件序列之后是最优的。第二个条件要求开始时,别的参与人关于每个参与人 i 的信念由 p_i 给定。

行动决定的信念这个条件要求只有参与人的行动影响别的参与人关于他的类型的信念：(ⅰ)如果参与人 i 在历史 h 不必行动，那么在 h 采取的行动不影响别的参与人关于参与人 i 的类型的信念，(ⅱ)如果参与人 i 是在 h 采取行动的参与人中的一个，那么别的参与人关于参与人 i 的类型的信念仅依赖于 h 和由参与人 i 采取的行动，而不依赖于别的参与人的行动。这个条件排除了这样的可能，即假如参与人 j 对他的关于参与人 i 信念的更新受到某个参与人 $k\neq i$ 进行的一个行动影响。因此这个条件与假设参与人战略间的独立性的一般方法是一致的。

贝叶斯更新条件与下列情形相关：给定 σ_i，参与人 i 在历史 h 的行动与别的参与人关于参与人 i 在 h 的行动与别的参与人关于参与人 i 在 h 的信念是一致的。在这样一种情形中该条件不仅要求新的信念仅依赖于参与人 i 的行动(像由行动决定的信念条件要求一样)，还要求参与人的信念由贝叶斯法则派生于他们对参与人 i 的行动的观察。因此参与人用贝叶斯法则更新他们关于参与 j 的信念直到他们的行动与他的战略 σ_i 相抵触，在这点他们形成一个新的关于参与人 i 的类型的猜测，这个类型是直到有另一个与 σ 冲突的未来贝叶斯更新的基础。 234

我们现在证明：与一个有限贝叶斯可观察行动的扩展博弈相联系的每一个扩展博弈序贯均衡，在它导致相同的行动和信念的意义下，等价于贝叶斯扩展博弈的一个精炼贝叶斯均衡。

■命题 234.1　令 (β,μ) 为一与有限贝叶斯可观察行动的扩展博弈 $\langle\langle N,H,P\rangle,(\Theta_i),(p_i),(u_i)\rangle$ 相联系的扩展博弈序贯均衡。对每一个 $h\in H$，$i\in P(h)$ 和 $\theta_i\in\Theta_i$ 令 $\sigma_i(\theta_i)(h)=\beta_i(I(\theta_i,h))$。那么存在一个族 $(\mu_i(h))_{i\in N,h\in H}$，这里 $\mu_i(h)$ 是 Θ_i 上的一概率测度，使得对所有 $\theta\in\Theta$ 和 $h\in H$ 有

$$\mu(I(\theta_i,h))(\theta,h)=\Pi_{j\in N\setminus\{i\}}\mu_j(h)(\theta_j)$$

并且 $((\sigma_i),(\mu_i))$ 是贝叶斯扩展博弈的一个精炼贝叶斯均衡。

? 练习 234.2　证明上述命题。(主要的困难在于验证序贯均衡中的信念可被一个关于参与人类型的共同独立信念族复制。)

比起序贯均衡的概念来，精炼贝叶斯均衡的概念易于使用。但有意义的也只能应用于一个较小的情形集合(因为没有必要涉及一致性)。下列的例子表明了即使在这样一个限制的定义域中两个概念也不是等价的。

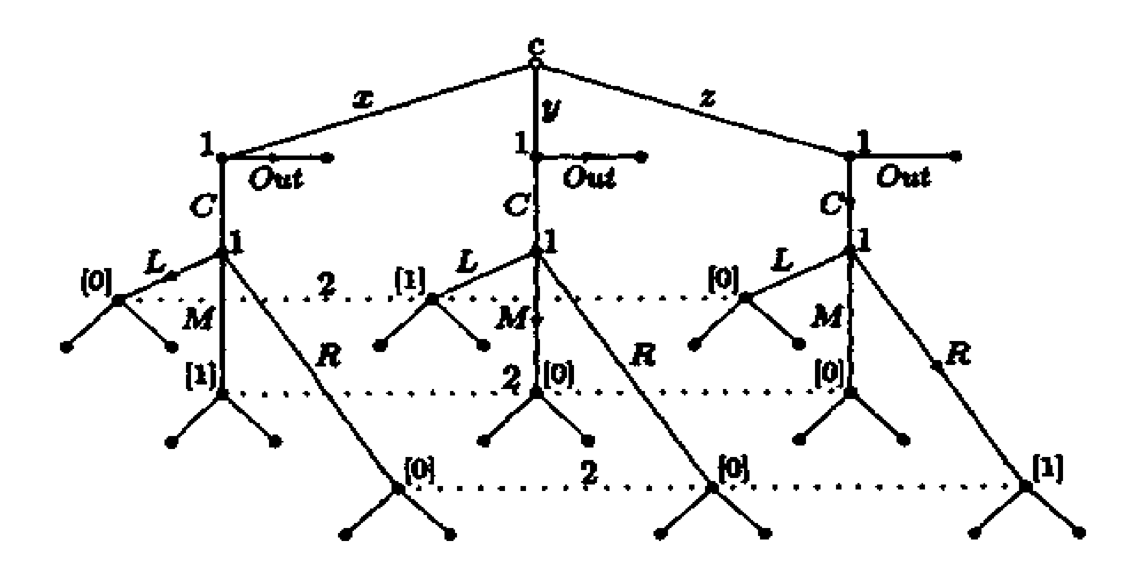


图 235.1 例 234.1 中行动贝叶斯扩展博弈的结构。这样一个博弈可能有一精炼贝叶斯均衡(在其中参与人 1 的行动是由箭头表示的行动,参与人 2 的信念由[1]和[0]的表示),但这并不是相联系的扩展博弈的一序贯均衡

◇例 234.3 考虑一个结构由图 235.1 表示的贝叶斯可观察行动的扩展博弈。参与人 1 有三个等可能的可能类型 x、y 和 z,参与人 2 只有一个类型。考虑一个精炼贝叶斯均衡$((\sigma_i),(\mu_i))$,其中$\sigma_1(x)=(Out,L)$,$\sigma_1(y)=(Out,M)$,$\sigma_1(z)=(C,R)$,$\mu_1(C,L)(y)=1$,$\mu_1(C,M)(x)=1$,且$\mu_1(C,R)(z)=1$。即如果参与人 2 观察到历史(C,L),则他相信参与人 1 当然是类型 y;如果观察到历史(C,M)则相信参与人 1 的类型为 x;若观察到历史(C,R)则相信参与人 1 的类型为 z(惟一的与 σ_1 相一致的历史)。

235 我们断言$((\sigma_i),(\mu_i))$可能(依赖于支付)是这样一个博弈的精炼贝叶斯均衡,因为它满足行动决定信念和贝叶斯更新的条件。(注意 $\mu_1(C,L)$ 和 $\mu_1(C,M)$并未受贝叶斯更新条件的约束,因为在给定 σ_1 条件下历史(C,L)和(C,M)的概率都是零。)不过,相联系的状态(β,μ)不是一致的,因此不管支付为何它都不是任何相联系的扩展博弈的一序贯均衡。为说明之,令(β^n,μ^n)为一收敛到(β,μ)的状态序列。它的性质是在每个信息集合中 β^n 赋正概率给每个选择且每个 μ^n 是用贝叶斯法则派生于β^n。用 c_θ^n 表示根据β_1^n 参与人 1 在历史 θ 后选择 C 的概率,用 ℓ_θ^n 和 m_θ^n 表示根据β_1^n 她在历史(θ,C)后分别选择 L 和 M 的概率。对 $K=L,M,R$ 令 $I_2^K=\{(x,C,K),(y,C,K),(z,C,K)\}$为参与人 1 选 C 然后选 K 所达到的参与人

2 的信息集合。那么由贝叶斯法则我们有 $\mu^n(I_2^L)(y,C,L)=c_y^n\ell_y^n/(c_x^n\ell_x^n+c_y^n\ell_y^n+c_x^n\ell_x^n)$(应用参与人 1 的三个类型是等可能的事实),它收敛(由假设)到 $\mu(I_2^L)(y,C,L)=1$。因为 $\ell_y^n\to\beta_1(y,C)(L)=0$ 和 $\ell_x^n\to\beta_1(x,C)(L)=1$,用 c_y^n 去除 $\mu^n(I_2^L)(y,C,L)$的分子和分母,我们得到 $c_x^n/c_y^n\to 0$。对于 I_2^M 的信念进行类似的计算,我们得到相反的结论 $c_y^n/c_x^n\to 0$。因此(β,μ)是不一致的。

这个例子反应了序贯均衡的概念要求参与人 2 在两个均衡未达到的信息集合中的信念不是独立的:它们必定派生于参与人 1 的同一个摄动战略序列。精炼贝叶斯均衡的概念对信念没加这个限制。

236

精炼贝叶斯均衡的概念可由对参与人在未预料到的事件后形成的信念,加上附加的约束来精炼。例如,人们可要求如果在某一点上非 i 的参与人得到参与人 i 肯定不是类型 θ_i 的结论,那么他们在后来就一直维持这个结论。这个要求在一些经典文献中被采用(例如,可参看 Osborne 和 Rubinstein(1990, pp. 96—97))。但是,下一个例子表明了存在没有精炼贝叶斯均衡满足它的博弈:在我们所描述的博弈的所有精炼贝叶斯均衡中,一个在某个时点将零概率赋给某段历史的参与人在稍后将正概率赋给这段历史。

◇例 236.1　在图 236.1 的博弈的任一序贯均衡中

• 参与人 1 在历史 r 后选 C

• 参与人 1 在历史(r,C,C)后选 X

• 参与人 2 在他的信息集合 I^1 中选 C

• 参与人 2 以至少$\frac{4}{5}$的概率在他的信息集合 I^2 选 X(否则参与人 1 在历史 ℓ 和(ℓ,C,C)后选 C,所以参与人 2 在他的信息集合 I^2 赋概率 1 给历史(ℓ,C,C,C),使 C 劣于 X。)

• 参与人 1 在历史 ℓ 后选X。

所以参与人 2 在 I^1 的信念赋概率 1 给历史 r,而他在 I^2 的信念赋正概率给机会已选了 ℓ(否则 C 优于 X)。

237

?练习 237.1　参与人 1 和 2 就某物讨价还价,该物对参与人 1 的价值以同等概率为 0 或 3。参与人 1 知道物体的价值,而参与人 2 仅在他购买后才知道这个价值。对参与人 2 物体的价值是它对参与人 1 的价值加 2。讨价还价过程如下:参与人 1 出价,参与人 2 可接受也可拒绝它;在拒绝的事件中参与人 1 出另一个价,参与人 2 既可接受也可拒绝。如果没有出

价被接受那么参与人 1 留着该物体并获得一个等于它价值的支付；参与人 2 的支付是 0。给定可能的出价集合是有限的，包括 2 和 5。试证明：存在一个纯战略中的序贯均衡，其中当参与人 1 的估值是 3 时没有交易，而当参与人 1 的估值是 0 时在第一期该物以价格 2 被出售。

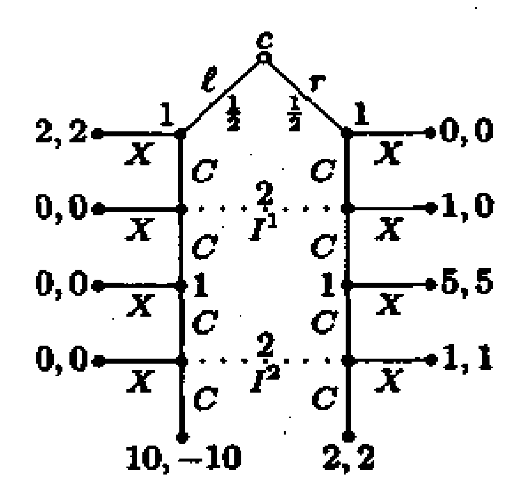


图 236.1　在例 236.1 中所讨论的扩展博弈。在这个博弈的所有序贯均衡中，参与人 2 在他的第一个信息集合相信机会肯定选 r，但在第二个信息集合相信机会以一正概率选 ℓ

12.3.1　信号传递博弈

信号传递博弈是一个有下列简单形式的贝叶斯可观察行动的扩展博弈。有两个参与人，一个“发送者”和一个“接收者”。发送者知道一个不确定参数 θ_1 的值，然后选择一个行动（被称为信号，尽管它可能是支付相关的）。接受者看到信号（而不是 θ_1 的值）并采取一个行动 α。每个参与人的支付依赖于 θ_1 的值、由发送者发送的信号 m 和由接收者采取的行动 a。

正式地，**信号传递博弈**（signaling game）是一贝叶斯可观察行动的扩展博弈 $\langle \Gamma, (\Theta_i), (p_i), (u_i) \rangle$，其中 Γ 是两个参与人的博弈形式先由参与人 1 采取一个行动后由参与人 2 采取一个行动。并且 Θ_2 是一单元素集。

这样一个博弈中的紧张局面来自于接收者控制行动而发送者控制信息的事实。接收者有试图从发送者的信号推断发送者类型的欲望，发送者可能有误导接收者的欲望。

一个著名的简单信号传递博弈的简单例子是下列由斯宾塞（Spence）(1974)提出的。

◇例 237.2 （Spence 教育模型）一个工人（发送者）知道自己的才能，而她的雇主（接收者）不知道。工人对雇主的价值是 θ_1 的期望值，我们假设雇主支付工人一个等于这个期望的工资 w。（在此假设之下的经济学描述是有很多雇主为此工人竞争，所以她的工资被提高到 θ_1 的期望值。）238 为了模化这个行为，假设我们假定雇主的支付是 $-(w-\theta_1)^2$（当 $w=E(\theta_1)$时它的期望被最大化）。工人的信号是她所获教育的数量 e，她的支付是 $w-e/\theta$（反应了 θ 越大工人越容易获得教育的假设）。假定工人的才能是 θ_1^L 或 $\theta_1^H>\theta_1^L$，并且用 p^L 和 p^H 表示这些值的期望。将注意力限于纯战略均衡并用 e^L 和 e^H 表示两个类型的选择（信号）。该博弈有两类精炼贝叶斯均衡。

混同均衡（Pooling Equilibrium）在一类均衡中两个类型选择同样的教育水平（$e^L=e^H=e^*$）并且工资是 $w^*=p^H\theta_1^H+p^L\theta_1^L$。$e^*$ 的可能值如下决定。如果一个工人选择一个不同于 e 的值的 e^*，那么在一个均衡中雇主必须付给她工资 $w(e)$满足：对 $K=L,H$ 有 $w(e)-e/\theta_1^K\leqslant w^*-e^*/\theta_1^K$。满足这个不等式最容易的方法是使雇主相信每一个偏离来自于类型为 θ_1^L 的工人，所以对 $e\neq e^*$ 有 $w(e)=\theta_1^L$。对工人最有利的偏离是然后选 $e^L=0$，所以我们需要 $\theta_1^L\leqslant w^*-e^*/\theta_1^L$，它等价于 $e^*\leqslant\theta_1^L p^H(\theta_1^H-\theta_1^L)$。

分离均衡（Separating Equilibrium）在另一类均衡中两类工人选不同的教育水平，在此情形中 $e^L=0$（因为付给类型为 θ_1^L 的工人的工资是 θ_1^L，与 e^L 独立）。为了使每个类型模仿另一个是无利可图的我们需要

$$\theta_1^L\geqslant\theta_1^H-e^H/\theta_1^L \text{ 和 } \theta_1^H-e^H/\theta_1^H\geqslant\theta_1^L,$$

它等价于 $\theta_1^L(\theta_1^H-\theta_1^L)\leqslant e^H\leqslant\theta_1^H(\theta_1^H-\theta_1^L)0$，因为 $\theta_1^H>\theta_1^L$，分离均衡因此存在；信号 $e^L=0$ 和 $e^H\in[\theta_1^L(\theta_1^H-\theta_1^L),\theta_1^H(\theta_1^H-\theta_1^L)]$作为下列均衡的一部分被支持，在其中任何非 e^H 的行动导致雇主得到工人的类型为θ_1^L 的结论。

? 练习 238.1　证明我们已描述的精炼贝叶斯均衡也是序贯均衡。

下节中的例 246.1 表明了序贯均衡概念的精炼如何排除这些均衡的大多数。

12.3.2　声誉模型

在第 6.5 节我们研究了两个说明下列事实的有限边界博弈：在子博弈

239 精炼均衡中，一个参与人维持关于另一个参与人这样的假设，即在那个参与人已多次从他的均衡战略偏离之后仍意图坚持这个均衡战略。例如，在连锁店博弈(一个有限完全信息扩展博弈)惟一的子博弈精炼均衡中每个挑战者即使在一段连锁店已抗争大量进入者的历史之后仍然相信连锁店会默许它的进入。

在这样一段历史之后，一个参与人可能开始怀疑他对手的意图，一种抓住了上述思想的方法是研究这样一个模型，即在博弈刚开始时，存在一个小的可能性使对手有不同于这些在原始扩展博弈形式中所抓住的动机。(这样所涉及的偏离参与人，以一个小概率在他们对手的战略谋划中被称为"疯狂的"或"不理性的"，尽管是他们的支付而非他们的战略偏离了标准。在这样一个"不确定化"博弈中，正常的类型可能发现在博弈开始时模仿偏离类型是有利的：由于这样做导致的短期损失可能会被从维持他们的对手对于他们动机的怀疑的所得远远超过。所以这样一个博弈能抓住人们这样的思想，即人们可能好像他们是"疯狂的"那样行动，因为这样做导致他们的对手用这样一种方式反应，即根据他们真的"疯狂的"偏好他们会更好。下列的例子说明了这个方法

◇例 239.1 (连锁店博弈的一个摄动)考虑连锁店博弈的一个变形，其中有一个在博弈开始时连锁店宁愿抵制而不接受进入的小概率。精确地，考虑可观察的行动贝叶斯扩展博弈$\langle \Gamma, (\Theta_i), (p_i), (u_i) \rangle$，其中$\Gamma$是连锁店博弈(第 6.5.1 节)的博弈形式，$\Theta_{CS} = \{R, T\}$，对每个潜在的竞争者$k = 1, \cdots, K$，$\Theta_k$是一单元素集，$p_{CS}(R) = 1 - \epsilon$，$p_{CS}(T) = \epsilon$，支付函数$u_i$定义如下。对$\Gamma$的任一终点历史$h$，令$h_k$为在时期$k$的行动序列。每个挑战者$k$的支付独立连锁店类型且由下式给定

$$u_k(\theta, h) = \begin{cases} b & 若\ h_k = (In, C) \\ b - 1 & 若\ h_k = (In, F) \\ 0 & 若\ h_k = Out, \end{cases}$$

这里$0 < b < 1$。连锁店的支付$u_{CS}(\theta, h)$是在K个时期它的支付和，这里

240 它在时期k的支付由下式给定

$$\begin{cases} 0 & 若\ h_k = (In, C) 且\ \theta_{CS} = R，或\ h_k = (In, F) 且\ \theta_{CS} = T \\ -1 & 若\ h_k = (In, F) 且\ \theta_{CS} = R，或\ h_k = (In, C) 且\ \theta_{CS} = T \\ a & 若\ h_k = Out, \end{cases}$$

这里 $a>1$。换言之，在任一时期对两个类型的连锁店最优结果是挑战者停留在外面。正常的连锁店宁愿接受一个进入者而不抵制（抵制是有成本的），而强硬的连锁店宁愿抵制而不接受。

我们并没有刻画该博弈的所有精炼贝叶斯均衡，而仅是描述了一个极端不同于完全信息博弈的惟一子博弈精炼均衡的均衡。这个均衡有下列性质：只要没有挑战者进入，则挑战者维持概率为ϵ 的关于连锁店是强硬的信念；被接受的进入导致挑战者转向相信连锁店不一定是强硬的；被抵制的进入导致挑战者维持或增加他们赋给连锁店为强硬的概率。因此对一个正常的连锁店来说，如同一个强硬的连锁店一样，威胁抵制任一发生的进入至少直到靠近期限边界是最优的。这个威胁阻止所有进入直到靠近边界，这时正常连锁店的威胁变得较不坚定。它以正概率与进入者合作，这是与开始时以正概率进入的进入者相一致的行为。一旦挑战者进入且连锁店与它合作，则挑战者转而相信连锁店肯定是正常的且从今以后可经常进入。

均衡被精确地如下给出，由正常连锁店的战略 $\sigma_{CS}(R)$和每个挑战者 k 在任何一段历史之后的战略σ_k 规定的行动依赖于$\mu_{CS}(h)(T)$，这里由挑战者在历史 h 之后赋给连锁店为强硬的概率。连锁店在以一个参与人的进入为结束的历史之后才不得不行动。对任一段这样的历史 h，用 $t(h)$表示已经行动的参与人的数量，所以 $\sigma_{CS}(R)(h)$规定了连锁店对挑战者 $t(h)$ 的反应。若 $P(h)=CS$ 的话，则正常连锁店的战略由下式给定

$$\sigma_{CS}(R)(h)=\begin{cases}C & \text{若 } t(h)=K\\ F & \text{若 } t(h)\leqslant K-1 \text{ 且 } \mu_{CS}(h)(T)\geqslant b^{K-t(h)}\\ m_{CS}^{h} & \text{若 } t(h)\leqslant K-1 \text{ 且 } \mu_{CS}(h)(T)<b^{K-t(h)}\end{cases}$$

这里 m_{CS}^{h}是 F 以概率$[(1-b^{K-t(h)})\mu_{CS}(h)(T)]/[(1-\mu_{CS}(h)(T))b^{K-t(h)}]$被采用和 C 以互补概率被采用的混合战略；强硬连锁店的战略由下式给定 241

$$\sigma_{CS}(T)(h)=F \text{ 若 } P(h)=CS.$$

如果 $P(h)=k$（所以 $t(h)=k-1$）的话挑战者 k 的战略由下式给定

$$\sigma_k(h)=\begin{cases}Out & \text{若 } \mu_{CS}(h)(T)>b^{K-k+1}\\ m_k & \text{若 } \mu_{CS}(h)(T)=b^{K-k+1}\\ In & \text{若 } \mu_{CS}(h)(T)<b^{K-k+1},\end{cases}$$

这里 m_k 是Out 以概率$\frac{1}{a}$被采用和In 以概率$1-\frac{1}{a}$被采用的混合战略。挑

战者的信念如下：$\mu_{CS}(\phi)(T)=\epsilon$，并且对任一满足 $P(h)=k$ 的历史 h 我们有 $\mu_{CS}(h,In)=\mu_{CS}(h)$ 并且由挑战者 $k+1$ 赋给连锁为强硬的概率 $\mu_{CS}(h,h_k)(T)$ 是

$$\begin{cases}\mu_{CS}(h)(T) & \text{若 } h_k=Out\\ \max\{b^{K-k},\mu_{CS}(h)(T)\} & \text{若 } h_k=(In,F)\text{且 } \mu_{CS}(h)(T)>0\\ 0 & \text{若 } h_k=(In,C)\text{或 } \mu_{CS}(h)(T)=0.\end{cases}$$

为了理解这个均衡可考虑图 242.1，它表明了对每个 k 值挑战者 k 在时期 k 开始时沿着连锁是强硬的均衡路径的信念。数 k^* 是使 $\epsilon<b^{K-k^*+1}$ 的最小 k 值。沿着均衡路径直到时期 k^* 挑战者以概率 ϵ 维持初始他们的关于连锁店为强硬的信念；所有挑战者直到 k^*-1 仍停留在外边。（若与此相反，他们中的某个不进入，则正常连锁店和强硬连锁店一样反应为抵制，在此之后随后的挑战者关于连锁店是强硬的信念也以 ϵ 被维持。）因为 $\epsilon<b^{K-k^*+1}$，所以参与人 k^* 进入。正常连锁店以在抵制和合作间的随机化为反应（因为 $\mu_{CS}(h)(T)=\epsilon<b^{K-k^*}$）。它使用的概率是使得在它抵制后关于它是强硬的概率（用贝叶斯法则计算）是 b^{K-k^*}，为 b^{K-k+1} 图形上对应时期 k^*+1 的点。（这蕴含着 $\mu_{CS}(h)(T)$ 越靠近 b^{K-k+1} 的图形，正常连锁店在进入事件中抵制的概率越高。）如果连锁店合作（像正常连锁店以正概率这样做，那么挑战者赋给连锁店为强硬的概率为0。

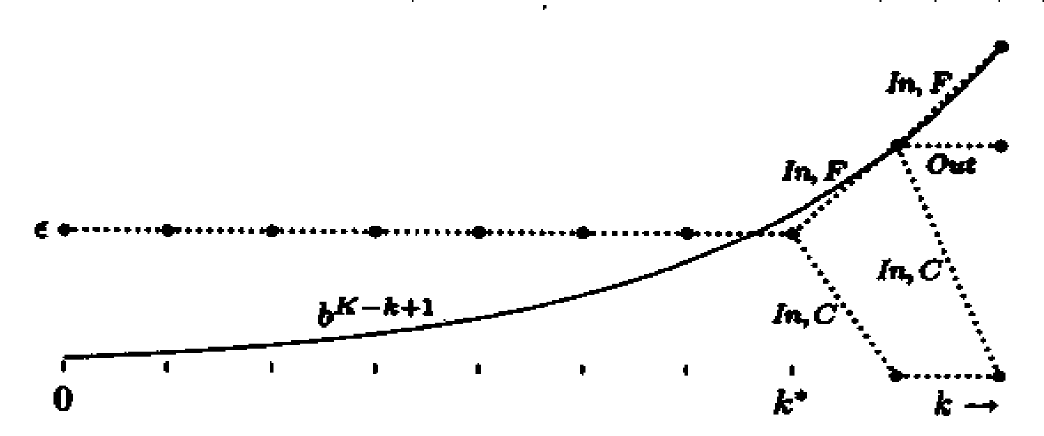


图 242.1 挑战者在每个时期开始时关于连锁店沿着在课文中所描述的摄动连锁店博弈的精炼贝叶斯均衡的均衡路径为强硬的信念。沿着路径的可能信念由点表示。可能的转换由虚线表示；与每条虚线相应的标志表示导致转换的行动序列。（注意仅是沿着均衡路径以正概率发生的转换被表示了出来；离开均衡路径可能有更多）

如果连锁店在时期 k^* 抵制进入者，那么挑战者 k^*+1 赋给连锁店为强硬的概率上升到 b^{K-k^*}，所以挑战者 k^*+1 在进入与不进入间随机化。如果挑战者 k^*+1 不进入，那么关于连锁店为强硬的信念保持不变且挑战者 k^*+2 确定会进入。如果挑战者 k^*+1 进入并且连锁店抵制，那么被赋给连锁店为强硬的概率再次上升到 b^{K-k+1} 的图线。如果挑战者 k^*+1 进入并且连锁店合作，那么被赋给连锁店为强硬的概率下降到 0 并且挑战者 k^*+2 进入。相同的模式一直继续到博弈结束：在任何一个挑战者的信念在图线之下的时期挑战者进入；如果连锁店以抵制为反应则随后挑战者的信念上升到图线之上。在任何一个挑战者的信念在图线之上的时期挑战者随机化；如果它不进入那么信念不变，而若它进入并受抵制，那么信念再次上升到图线之上。在每一个情形中连锁店合作的结果是挑战者赋给它为强硬的概率降为 0。 242

注意如果任何挑战者 k 的信念由图上的一点给定，那么在一段以 k 决定进入为结束的历史 h 之后，连锁店抗争的概率是 $\mu_{CS}(h)(R)\cdot\sigma_{CS}(R)(h)(F)+\mu_{CS}(h)(T)\cdot 1=(1-b^{K-k+1})[(1-b^{K-k})b^{K-k+1}]/[(1-b^{K-k+1})b^{K-k}]+b^{K-k+1}=b$，使得挑战者 k 在进入与停留在外面的两者之间无差别。挑战者选择进入的概率不管连锁店的未来行动如何都会使得它的期望支付为 0。类似地，如果任何挑战者 k 的信念由图线以下(上)的一点给定，那么连锁店抵制的概率小于(大于)b，使得对挑战者 k 来说进入(停留在外边)是最优的。 243

在第一个某个挑战者进入之后的所剩余的时期数量(在刚描述的情形中为 $K-K^*$)独立于博弈的长度。因此博弈越长，没有挑战者进入的时期越多。

?练习 243.1　完成下列证明，上面所描述的二元组$((\sigma_i)(\mu_i))$是博弈的一个精炼贝叶斯均衡。

据说有时候正常连锁店在这个均衡中“建立声誉”。不过注意沿着均衡路径没有声誉被建立：直到最后几个时期没有进入发生，所以即使正常连锁店在有人已进入的情况下也会抵制，当然它没有获得这样做的机会。为了维持挑战者持有的关于连锁店动机的怀疑，正常连锁店对挑战者在博弈开始时偏离的这个反应是必要的，这个怀疑被要求去阻止他们进入。在这个(均衡之外的)靠近博弈开始的进入之后，正常连锁店的考虑就如同一个想

建立或至少维持声誉的参与人的考虑。

12.4 序贯均衡的精炼

在考虑参与人观察到与均衡战略不一致的行动所持有的信念时，序贯均衡的概率允许很多(尽管如我们所见并不完全)自由。作为均衡具体化的一部分，将信念包括进来的一个优点是它允许我们进一步讨论对这些信念的限制。很多这样的限制都已提出过了；现在提出的新的解的概念在经典文献中被称为序贯均衡的精炼。我们仅给出这个主题的简单介绍。

序贯均衡的概念实质是将信念建立在均衡战略的基础上并且仅将“结构”约束加于均衡外的信念上。序贯均衡的精炼导入了新的战略考虑，如下例所示。

244

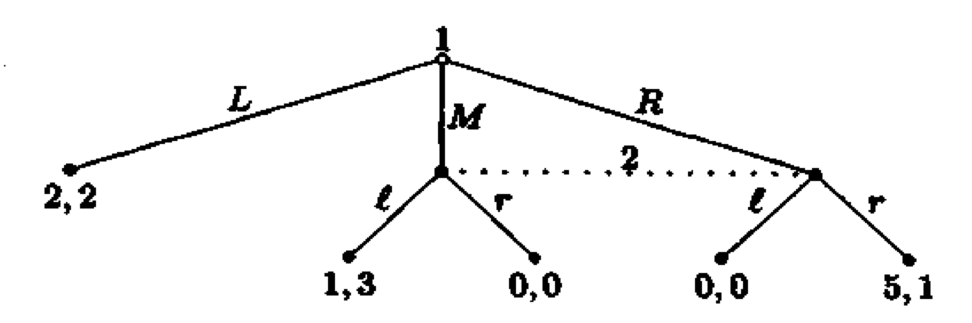


图 244.1 这个博弈有一结果为(L,ℓ)的序贯均衡，尽管参与人 2 在这样一个均衡中的信念有不符合要求的特征：它将一个正概率赋给参与人 1 已选行动 M，它严格劣于 L

◇例 244.1 图 244.1 中的博弈有一结果为(R,r)的序贯均衡。它有一个结果为(L,ℓ)的序贯均衡，其中参与人 2 在他的信息集合达到的事件中相信参与人 1 以高概率选 M。不过，如果参与人 2 的信息集合达到，那么对于他的一个合理的结论可能是：因为对参与人 1 来说行动 M 严格劣于 L，所以对参与人 1 来说 M 是不理性的，因此她必须已选 R。这个结论排除了任何关于支持(L,ℓ)作为一序贯均衡结果的信念。

下一个例子进一步阐明了上面例子中所导入的战略考虑。

◇例 244.2 (Beer 或 Quiche)考虑图 245.1 中的博弈，这又是个信号

传递博弈，其中参与人 1 有两个类型，强(strong)和弱(weak)，这些类型的概率分别是 0.9 和 0.1，信号集合是$\{B, Q\}$(早餐中啤酒或软饮料的消费)，参与人 2 有两个行动，F(*fight*)或 N(*not*)。参与人 1 的支付是两元素的和：若参与人 2 不抗争，则她获得两个单位，如果她消费她喜欢的早餐则得到 1 个单位(若她为强，则得 B，若她为弱则得 Q)。参与人 2 的支付不依赖于参与人 1 的早餐；如果他抗争弱的类型或如果他不抗争强的类型则支付为 1。

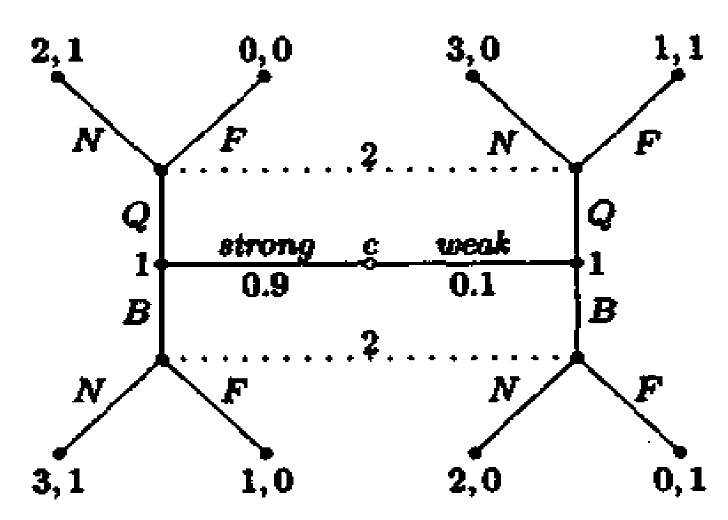


图 245.1 啤酒或者软饮料博弈(例 244.2)

该博弈有两类序贯均衡，如下。

• 参与人 1 的两个类型都选 B，且若参与人 2 看到 Q 则抗争，若看到 B 则不抗争。如果参与人 2 看到 Q 则他至少赋概率 0.5 给参与人 1 为弱的。

• 参与人 1 的两个类型都选 Q，且参与人 2 看到 B 则抗争，若看到 Q 则不抗争。如果参与人 2 看到 B 则他至少赋概率 0.5 给参与人 1 为弱的。 245

下面的论证意味着第二类均衡不是合理的，如果参与人 2 看到参与人 1 选 B，则他应该得到参与人 1 是强的结论。理由如下，如果参与人 1 是弱的，则他应该认识到不管参与人 2 的反应如何，对她来说选择 B 比遵从均衡(在其中她获得支付 3)更坏。进一步说，如果参与人是强的并且如果参与人 2 从参与人 1 选 B 得到她是强的结论从而相应选 N，那么参与人 1 的确比她在均衡中(其中她获得 2)更好。估计到参与人 2 会推断她的确强，对参与人 1 的一个强类型来说，从均衡偏离是合理的，所以参与人 2 关于参与人 1 当她看到 B 时以正概率为弱的信念是不合理的。

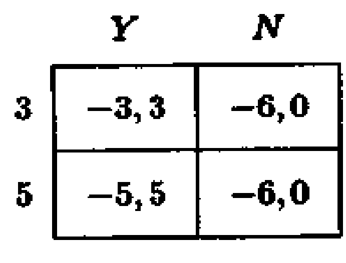
在这个例子中的论证弱于前面一个例子中的论证。在前一个例子中论

证仅使用了行动 M 是劣的这一事实，因而独立于被剔除的均衡。相反，在这里的博弈中，论证是与被剔除的均衡相关的。除非假设是参与人根据两个类型都选 Q 的均衡行动，否则信号 B 一定来自于强类型的论证缺乏根据。这提出了一个批评：如果论证的根据是参与人 1 的两个类型都选 Q 的情形是一均衡，那么大概参与人 2 在看到一个偏离后就会简单地得出参与人 1 不是理性的结论或不理解博弈结构的结论，而不是假设她会理性地试图去送给他一个战略信号。

◇例 246.1 (Spence 教育模型)我们先证明例 237.2 中博弈的所有混同均衡都被前个例子中的论点剔除。令 e 满足 $w^*-e^*/\theta_1^L>\theta_1^H-e/\theta_1^L$ 和 $w^*-e^*/\theta_1^H<\theta_1^H-e/\theta_1^H$。(这样一个 e 值明显存在)。如果一个类型 θ_1^H 的工人偏离并选 e(它超过了 e^*)那么公司应得到偏离来自于类型 θ_1^H 的结论，因为即使她说服公司相信她的类型为 θ_1^H，但她这样偏离，则类型 θ_1^L 也更坏，而若她这样偏离的话，则类型 θ_1^H 更好。因此公司应该以支付一个 θ_1^H 的工资来对这样一个偏离作出反应，它使得偏离对类型为 θ_1^H 的工人是有利的。

现在考虑分离均衡。在这样一个均衡中 $e^L=0$ 且 $\theta_1^H-e^H/\theta_1^L\leqslant\theta_1^L$。如果 $\theta_1^H-e^H/\theta_1^L<\theta_1^L$ 那么类型为 θ_1^H 的工人可通过稍微减少 e 的值来偏离，从而证明她不是类型 θ_1^L，不管公司使用什么最优反应，(即使她/他支付 θ_1^H)类型为 θ_1^L 的工人都将从这样一个偏离中有所失。因此在所有经得住这个论点验证的序贯均衡中，类型为 θ_1^H 的教育水平 e^H 解决了方程 $\theta_1^H-e^H/\theta_1^L=\theta_1^L$。

?练习 246.2 (判前协商)(Pre-trial negotiation)参与人 1 和参与人 2 卷入一场事故中。参与人 1 知道她是疏忽的还是不疏忽的，而参与人 2 不知道；如果案子到了法庭，则法官会了解到事实真相。参与人 1 发出一个“接受它或放弃它”式的判前补偿性出价，它是 3 和 5 中的某个，对于参与人 2 可接受也可拒绝。如果他接受出价则大家就不去法庭。如果他拒绝则大家去法庭且参与人 1 在被判为疏忽的情况下支付 5 给参与人 2，而在判为不疏忽的情况下支付 0；每个情形中参与人 1 得支付法庭费用 6，支付在图 247.1 中概括。试将这个情形系统表达成一个信号传递博弈并找出它的序贯均衡。试提供一个排除不合理均衡的准则。(可参考 Banks 和 Sobel (1987))



	Y	N
3	−3,3	−6,0
5	−5,5	−6,0

参与人1为非疏忽的

	Y	N
3	−3,3	−11,5
5	−5,5	−11,5

参与人1为疏忽的

图247.1 练习246.2中的支付

12.5 颤抖手均衡

子博弈精炼均衡和序贯均衡的概念将序贯理性的要求作为参与人战略推理的一部分，它们引用这样的假设，即参与人不仅在选择他们在均衡路径上的行动中是理性的，且在形成关于别的参与人考虑均衡中不会发生的事件的计划的信念中也是理性的。我们在这节研究的概念遵从一条不同路径：他们将参与人考虑均衡之外事件的理性作为每个参与人考虑别的参与人可能犯不相关错误的结果，这些错误导致这些未预期到的事件。(他们的手可能颤抖)这些错误并没模化为博弈描述的部分。反而是，一个战略组合被定义为稳定的，如果它在给定一些关于由某种战略组合产生的信念情况下满足序贯理性，这种战略组合是体现“小”错误可能的均衡战略组合的一个摄动(不确定化)。注意摄动战略组合对所有参与人是共同的，并且仅在考虑惟一一个这种组合下均衡战略组合才要求为序贯理性的。

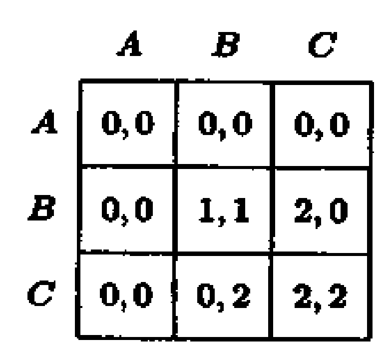
247

下列要求即使在战略博弈中也是很强的：参与人的战略不仅对别的参与人的均衡战略是最优的，而且对包含了小错误可能性的这些战略的摄动也是最优的。我们首先研究这种博弈；随后我们回到不完全信息扩展博弈。

12.5.1 战略博弈

记得我们说参与人在战略博弈中的战略是完全混合的，如果它赋正概率给参与人的每个行动。

248



	A	B	C
A	0,0	0,0	0,0
B	0,0	1,1	2,0
C	0,0	0,2	2,2

图 248.1 一个有非颤抖手均衡的纳什均衡（(A,A)和(C,C)）的战略博弈

▶定义 248.1 有限战略博弈的**一颤抖手均衡**(a trembling hand perfect equilibrium)是一满足下列条件的混合战略组合 σ：存在一收敛到 σ 的完全混合战略组合序列$(\sigma^k)_{k=0}^{\infty}$使得对每个参与人 i 战略σ_i 是对所有 k 值的σ^k_{-i}的最优反应。

令 σ 为一颤抖手均衡。因为每个参与人的期望支付在别的参与人的混合战略向量中是连续的，并且对每个参与人 i，战略 σ_i 是对σ_{-i}的一最优反应，所以每一个颤抖手均衡是一纳什均衡。注意定义仅要求每个参与人的战略是对某个错误概率收敛到零的摄动战略组合的一最优反应；所有参与人的战略必须是对同一个战略组合序列的最优反应，但它们不必是对所有这种序列的最优反应。

图 248.1 中的博弈表明并非所有纳什均衡是颤抖手均衡：(B,B)是博弈惟一的颤抖手均衡。

在第 4.3 节我们定义了在战略博弈中弱劣行动的概念；参与人没有理由使用这样一种行动，尽管依赖了别的参与人的行为他可能同样没有理由不使用这样一种行动。纳什均衡的概念不排除这种行动的使用（例可参看图 248.1 博弈中行动 A 和C），但是颤抖手均衡的概念排除了，因为一个弱劣战略不是对完全混合战略向量的最优反应。

在两人博弈中我们有下列较强的结论。

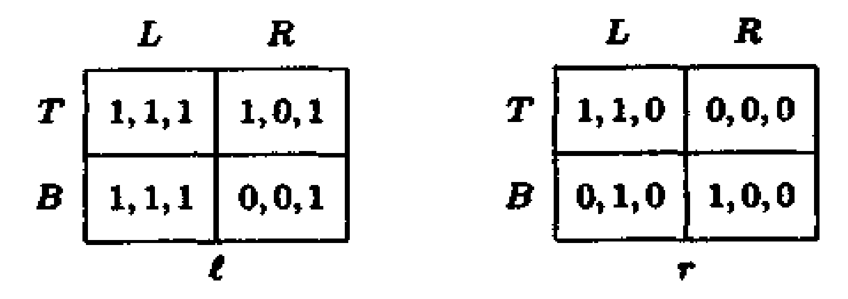
■命题 248.2 在有限两人战略博弈中一个战略组合是一颤抖手均衡，当且仅当它是一混合战略纳什均衡并且两个参与人的战略都不是弱劣的。

249

证明：剩下只需证明每个参与人的行动不是弱劣的一混合战略纳什均

衡是颤抖手均衡。令 σ^* 为一混合战略纳什均衡，在其中每个参与人 i 的战略 σ_i^* 都不是弱劣的，由练习 64.2 中的结论，每个参与人 i 的战略 σ_i^* 是对一完全混合战略的最优反应，比如说是 $j \neq i$ 的参与人 j 的 σ'_j。对任一 $\epsilon > 0$ 令 $\sigma_j(\epsilon) = (1-\epsilon)\sigma_j^* + \epsilon \quad \sigma'_j$。这个战略是完全混合的并且收敛到 σ_j^*；进一步说，σ_i^* 是对它的一最优反应。因此 σ^* 是一颤抖手均衡。 □

如图 249.1 中的三个参与人博弈所示，上述结论对多于两个参与人的博弈不成立。在此博弈中纳什均衡 (B, L, ℓ) 非劣但不是颤抖手均衡（只要参与人 2 和 3 分别赋足够小的正概率给 R 和 r 则参与人 1 对 T 的支付超过她对 B 的支付）。



	L	R
T	1,1,1	1,0,1
B	1,1,1	0,0,1

ℓ

	L	R
T	1,1,0	0,0,0
B	0,1,0	1,0,0

r

图 249.1　一个三人战略博弈，在其中有一纳什均衡 (B, L, ℓ) 不是颤抖手均衡但在其中每个参与人的战略是非劣的

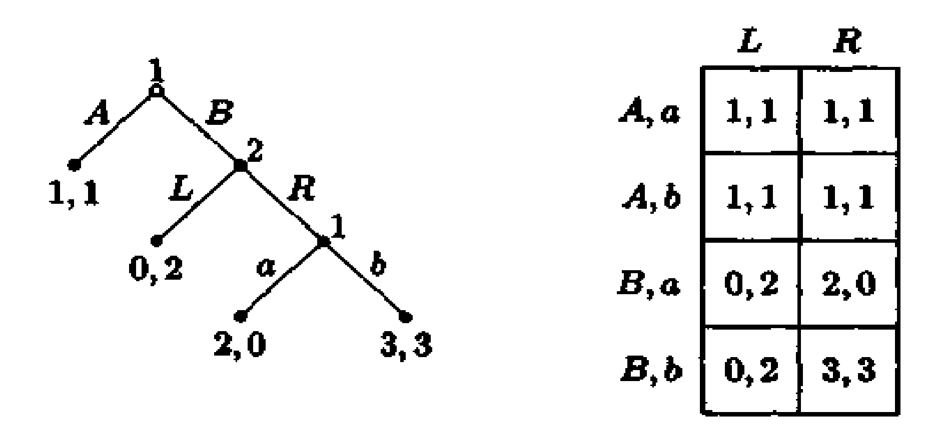
下列结论表明每一个战略博弈有一颤抖手均衡。

■**命题 249.1**　每一个有限战略博弈都有一颤抖手均衡。

证明：通过令每个参与人 i 的行动集合为参与人 i 的对某一满足 $\epsilon_i^j > 0$ 的族 (ϵ_i^j)（对每个 i, j）至少赋概率 ϵ_i^j 给参与人 i 的每个行动 j 的混合战略集合来定义博弈的一个摄动，（即，约束每个参与人以某个极小概率使用对他可行的每个行动。）由命题 20.3 每个这样的摄动博弈有一纳什均衡。考虑一个这种摄动博弈的序列，在其中对所有 i 和 j 有 $\epsilon_i^j \to 0$；由战略组合集合的紧性，从在序列中博弈纳什均衡集合里选取的某个序列收敛到，比如说是 σ^*。σ^* 对应于博弈的一颤抖手均衡便可证明。 □ 250

12.5.2　扩展博弈

我们现在将颤抖手均衡思想推广到扩展博弈模型。图 250.1 中博弈表明定义 248.1 的直接推广有一不合条件的特征。这个博弈有惟一子博弈精



	L	R
A,a	1,1	1,1
A,b	1,1	1,1
B,a	0,2	2,0
B,b	0,2	3,3

图 250.1 一个扩展博弈(左边),它的战略形式(右边),有一不是子博弈精炼均衡的颤抖手均衡(((A,a),L))

炼均衡$((B,b),R)$。不过战略二元组$((A,a),L)$是博弈战略形式的一颤抖手均衡,因为参与人 1 的战略(A,a)是对参与人 2 任一满足 L 的概率足够靠近 1 的战略的一最优反应,并且 L 是对参与人 1 满足下列条件的任一战略的一最优反应:(A,a)的概率足够接近 1 并且(B,a)的概率与(B,b)的概率相比足够大。关键点是当评价其战略的最优性时,参与人 1 并不考虑当她实行这个战略时她自己会犯错误的可能性。如果她确实允许错误,并且考虑在试图实行她的战略中,在博弈开始她可能选 B 而不是 A(同时考虑参与人 2 可能犯错并选 R 而非 L),那么对于她来说在她的第二个信息集合选 a 就不再是最优的。

这些考虑导致我们研究博弈的**代理人战略形式**(agent strategic form)而非战略形式的颤抖手均衡,其中在扩展博弈中对每个信息集合有一参与人;在扩展博弈中的每个参与人被分为多个代理人,他的每个信息集合都有一个代理人,一个给定的参与人的所有代理人有相同支付。(注意在代理人战略形式中任一混合战略组合 σ 对应了行为战略 β,其中 $\beta_i(I_i)$是参与人 i 的代理人在信息集合 I_i 中的混合战略。)因此我们有如下定义。

251

▶定义 251.1 有限扩展博弈的**一颤抖手均衡**(A trembling hand perfect equilibrium)是一个对应于博弈代理人战略形式的一个颤抖手均衡的行为战略组合。

在图 250.1 中行为战略组合$((A,a),L)$不是扩展博弈的一个颤抖手均衡。因为对参与人 1 的第一个代理人和参与人 2 的完全混合战略的任一二元组来说参与人 1 的第二个代理人惟一的最优反应是纯战略 b。更一般地,我们可以证明完全记忆有限扩展博弈的每一个颤抖手均衡对应于一序

贯均衡的行为战略组合。

■命题251.2 对完全记忆有限扩展博弈的每一个颤抖手均衡β,都存在一个信念系统μ使得(β,μ)是博弈的一序贯均衡。

证明:令(β^k)为对应于在与均衡β相联系的博弈的代理人战略形式中的混合战略组合序列的完全混合行为战略组合的序列。在博弈中每个参与人i的每个信息集合I_i中,定义信念$\mu(I_i)$为使用贝叶斯法则的由β^k定义的信念的极限,那么(β,μ)是一个一致的状态,因为每个代理人的信息集合以正概率被达到,并且每个代理人的战略是对每个β^k的一最优反应,从而由序贯均衡的一次偏离性质(参看练习227.1)可知,当每个信息集合中的信念由μ确定时,每一个这种战略也是对β的一最优反应。因此(β,μ)是一序贯均衡。 □

这个结论的逆命题并不成立,因为在一个同时行动博弈中,每个纳什均衡都是序贯均衡的战略组合,但仅有那些没有参与人的战略是弱劣的纳什均衡才可能是颤抖手均衡。(例如,在战略形式由图248.1给定的同时,行动扩展博弈中(A,A)和(C,C)是序贯均衡的战略组合,但不是颤抖手均衡。)不过,该逆命题"几乎"是真的。对几乎每一个博弈几乎每个序贯均衡的战略组合都是一个颤抖手均衡(参看Kreps和Wilson(1982b,定理1和3))。 252

下一个例子阐明了我们在例225.2所研究博弈的颤抖手均衡概念。

◇例252.1 (Selten的马)如我们在例225.2中所见,在图252.1中的博弈(同在图225.1中一样)有两类纳什均衡。第一个类型的均衡,其中参与人1选D,参与人2以至少正概率1/3选C,参与人3选L,并不与序贯均衡一致;它们不是颤抖手均衡,因为若参与人1以正概率选C且参与人3以接近于1的概率选L,则对参与人2来说行动d比c更好。第二类均衡,其中参与人1选C,参与人2选C,参与人3以至少3/4的概率选R,与序贯均衡一致且也是颤抖手均衡:取$\sigma_1^\epsilon(D)=\epsilon$,$\sigma_2^\epsilon(d)=2\epsilon/(1-\epsilon)$和若$\sigma_3(R)<1$则$\sigma_3^\epsilon(R)=\sigma_3(R)$、若$\sigma_3(R)=1$则$\sigma_3^\epsilon(R)=1-\epsilon$。

图253.1中的博弈表明扩展博弈的颤抖手均衡集合并不是它的战略形式颤抖手均衡集合的一个子集合,同时在扩展博弈的颤抖手均衡中,参与人可能使用一弱劣战略。战略组合$((L,r),R)$是博弈的一个颤抖手均衡(取一个战略组合序列,其中参与人1的第二个代理人比参与人颤抖更厉害),但它不是博弈战略形式的颤抖手均衡(因为参与人1的战略(L,r)弱劣于(R,r))。

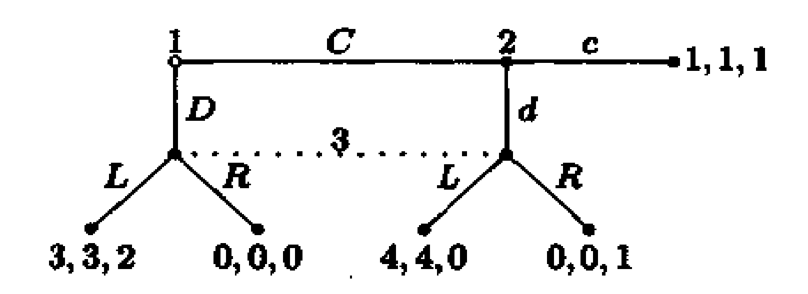
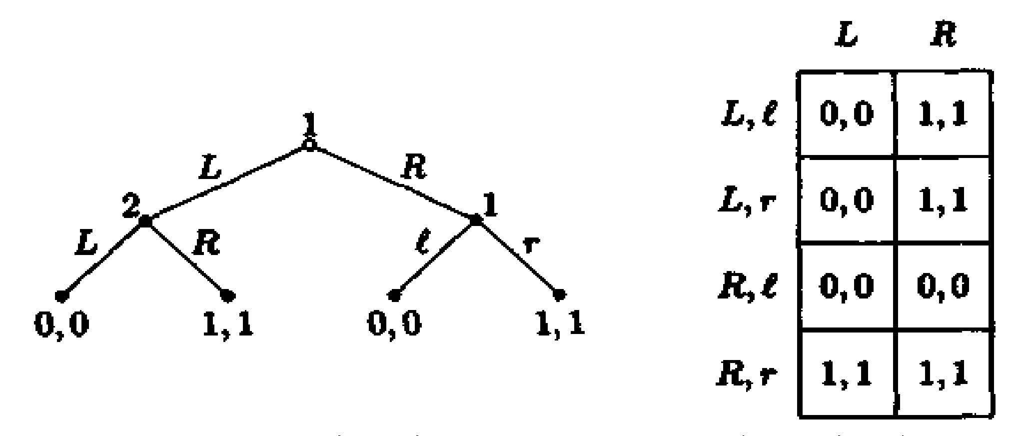


图 252.1 例 252.1 中的博弈(Selten 的马)



	L	R
L, ℓ	0,0	1,1
L, r	0,0	1,1
R, ℓ	0,0	0,0
R, r	1,1	1,1

图 253.1 扩展博弈(左边)有一颤抖手均衡，它并不与它的战略形式(右边)的任一颤抖手均衡一致

?练习 252.2 试证明扩展博弈的颤抖手均衡概念。(像序贯均衡概念)对于联合行动不是不变的(要第 11.2 节研究的原理之一)。(使用图 253.1 中的博弈)。

253 下列练习给出了一扩展博弈，在它所有的颤抖手均衡中至少有一个参与人使用一弱劣战略(所以没有这样的均衡是战略形式的颤抖手均衡)

?练习 253.1 两个人从事一场博弈去选择一个好结果或一个坏结果。开始他们中的每个都叫他自己或别的人为将作选择的人。如果他们两人叫同一个人则那个人选结果。如果他们中的每个都叫他们自己，则机会以同等概率选他们中的一个去做选择。如果他们中的每一个都选别的人那么好结果被自动选择。在过程的任何点上没有任何参与人知道由别的参与人初始选取的人。每个人从好结果得到的支付是 2，不管谁选了它；从坏结果他得到的支付是：若是别的人选它则为 1，若是他自己选它则为 0。试证明这个扩展博弈的颤抖手均衡集合不交于与它的战略形式颤抖手均衡相联

系的行为战略组合集合;并解释该均衡。

我们就本章做如下结论:注意到从命题249.1可知每一个完全记忆有限扩展博弈有一颤抖手均衡,并且因此由命题251.2,它是一序贯均衡。

■推论253.2 每一个完全记忆有限扩展博弈有一颤抖手均衡并且因此也有一序贯均衡。

[注解]

254

将子博弈精炼均衡的概念推广到不完全信息博弈的主要贡献者为Kreps, Selten和Wilson,他们发展了在本章中讨论的两个主要解的概念:颤抖手均衡(Selten(1975))和序贯均衡(Kreps和Wilson(1982b))。

12.2节依靠出现在Kreps和Wilson(1982b)和众多随后论文上的思想及例子。序贯均衡概念的复习可参看Kreps(1990b)。例223.1和练习229.1应归于Kreps和Ramey(1987)以及Battigalli(1988)。例225.2应归于Selten(1975),练习226.1归于Kreps和Wilson(1982b),例226.2应归于Kohlberg和Mertens(1986),练习227.1归于Hendon, Jacobsen和Sloth(1996),例228.2应归于Kreps和Ramey(1987),例229.2归于Battigalli(1996),例230.1归于Kohlberg和Reny(1997)。

在第12.3节中精炼贝叶斯均衡的讨论基于Fudenberg和Tirole(1991b),它包含了命题234.1和例234.3。例236.1基于Madrigal, Tan and Werlang(1987)。第12.3.1节和第12.4节基于(Cho和Kreps(1987))。12.3.2节中的声誉模型基于Kreps和Wilson(1982a)(也可参看Milgrom and Roberts(1982));Fudenberg和Maskin(1986,5节)证明了包含在模型中的非理性类型可以决定均衡结果。练习第246.2应归于Banks和Sobel(1987)。

在第12.5节讨论颤抖手均衡概率的大部分材料取自Selten(1975)。命题248.2由Cave, Kohlberg和van Damme各自独立发现。命题251.2应归于Kreps and Wilson(1982b)。在练习253.1中的博弈取自Mertens(1995)。

Battigalli(1996)研究了序贯均衡和精炼贝叶斯均衡并且给了一个关于一类博弈一致性的可替代刻画。Kohlberg和Reny(1997)应用概率系统表

达了序贯均衡的一个等价定义。如我们提到的,有很多序贯均衡概念的精炼;特别值得注意的是 Kohlberg 和 Mertens(1986)的工作。Myerson(1978)研究了一个称为“适度均衡”的颤抖手均衡概念的变形。

Kohlberg(1990)和 van Damme(1992)是关于纳什均衡精炼的文献的概览。

第四编

联盟博弈[①]

我们在第一、二、三编所研究的模型的基本要素是参与人的可能行动集合和他们关于可能结果的偏好关系，这里的结果是一个行动组合；每个行动由单个参与人自主采用，本篇中我们研究联盟博弈(coalitional game)模型。这个模型的一个基本要素是，每个参与人群(联盟)独立于其他参与人所采取的联合行动集合族。联盟博弈的一个结果是形成的联盟和它所采取的联合行动的一个具体化。(在经典文献中讨论的更一般模型是在其中很多联盟可能同时形成。)联盟博弈模型的另一个基本要素是，参与人关于所有可能结果集合的偏好关系组合。因此尽管行动是由联盟来采取的，但是理论是建立在个人偏好基础之上的(如本书其余部分的理论)。

联盟博弈解的概念是对每个博弈赋一结果集合。像以前一样，我们研究的每个解的概念，抓住了博弈参与人的自然推理思路；它确定了一个在某种意义上是稳定的安排集合。一般来说稳定性要求结果不受参与人群的某类偏离影响；相反，大多数(而非全部)非联盟博弈解要求不受单个参与人的偏离影响。我们研究的很多解的概念的变形在经典文献中都有分析；我们只考虑一个用于说明主要思想的样本。

一个联盟模型与一个非联盟模型的不同之处主要在于，它集中讨论哪个参与人群而不是哪个单个参与人能做什么；不同之处还在于，它不考虑参与人群内部作用的具体细节。如果我们希望在一个非联盟博弈中对联盟形成的可能性建模，那么我们必须详细说明联盟如何形成及它们的成员如何 256 选择联合行动。这些细节在联盟博弈中不存在；所以这样一种博弈的结果

① 又称合作博弈。——译者注

不依赖它们。

为了阐明两种建模方法间的差异,考虑下列情形。一个人群中的每个人都拥有一束投入品并且只有一种技术能产生惟一有价值的产出品。每个人的投入品在他自己的技术中不具生产能力,但在某些别人的技术中有生产能力。这种情形的一个非联盟模型精确确定对每个人有效的行动集合:也许每个人可报出一个他愿意交易投入品的价格向量,或者他可能提出一个对整个团体的投入品进行分配的方案。相反,一个联盟模型从每个人群能联合获得的支付向量集合开始。联盟可使用合约、威胁或承诺以取得一个更高水平的产出;这些制度在一个联盟博弈中都未被明确地模化。

我们并不认为这两种方法中的哪一种更高级或哪一种更基本。它们都反应了不同类型的战略考虑,并且都能使我们理解战略推理。非联盟模型和联盟模型间内部联系的研究同样可以是富有启发性的。

第 13 章

核

核是一个这样的联盟博弈的解的概念,即要求没有参与人的集合能主动偏离并采取一个使他们全体都更好的联合行动。在定义了概念和给出了它非空的条件之后,我们将探讨它与市场模型中竞争均衡概念间的联系。

13.1 可转移支付联盟博弈

我们从一个简单的联盟博弈形式开始,在其中每个参与人群都与惟一的一个数相联系,该数被解释为对人群有效的支付;对于这个支付如何在成员间进行分配没有任何限制。

▶定义 257.1 **一个可转移支付联盟博弈**(a coalitional game with transferable payoff)包括:

- 一个有限集合 N(参与人集合)
- 将 N 的每个非空子集 S(一个联盟)与某个实数 $v(S)$(S 的值(worth))相联系的一个函数 v。

对每个联盟 S,实数 $v(S)$是在 S 成员间有效分配的全部支付。即,联盟 S 能采取的联合行动集合包括在 S 的成员间所有可能的 $v(S)$分配。(较后,在第 13.5 节,我们定义一个更一般的联盟博弈概念,其中每个联盟都与一个并非必需是某个固定数量的所有可能分配集合的支付向量集合相联系。)

在很多情形中,一个联盟能获得的支付依赖于由别的参与人所采取的行动。不过,关于最适合我们讨论的联盟博弈的解释是,它模化了这样一种 258

情形,即不属于 S 的参与人的行动不影响 $v(S)$。在经典文献中给出了关于联盟博弈的另一些解释,例如,$v(S)$有时被解释为联盟 S 独立于联盟 $N\setminus S$的行动可保证的最多支付。这些别的解释改变了所定义的解的概念的解释,在这里我们不讨论它们。

在本章和下一章,从始至终我们都假定研究的可转移支付联盟博弈满足下列条件:所有参与人的联盟 N 的值至少与N 的任一分割的全部元素的值的和一样多。这个假设保证了所有参与人的联盟 N 的形成是最优的,这与我们对所研究的解的概念的解释的要求一样(尽管没有这个假设正式分析也是有意义的)。

▶定义 258.1 一个可转移支付联盟博弈$\langle N, v\rangle$是**凝聚性的**(cohesive)如果对 N 的每个分割$\{S_1,\cdots S_K\}$,有 $v(N)\geqslant\sum_{k=1}^{K}v(S_k)$。

(这是超可加性条件的一个特例,它要求对所有满足 $S\cap T=\phi$ 的联盟 S 和 T 有$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T)$)

13.2 核

在核之后的思想类似于在非联盟博弈的纳什均衡之后的思想:如果没有偏离是有利的,则一个结果是稳定的。在核的情形中,一个结果是稳定的如果没有联盟能偏离并获得一个对它的所有成员都更好的结果。对于一个可转移支付联盟博弈来说,稳定性条件是联盟不能获得一个超过它的成员现有支付和的支付。给定我们关于博弈是凝聚性的假设,我们将限于这样的结果,即所有参与人的联盟 N 形成。

令$\langle N, v\rangle$为一可转移支付联盟博弈。对任一实数组合$(x_i)_{i\in N}$和任一联盟 S,我们令 $x(S)=\sum_{i\in S}x_i$。如果 $x(S)=v(S)$一个实数向量$(x_i)_{i\in S}$是一个 S-**可行支付向量**(S-feasible payoff vector)。我们称一个 N-可行的支付向量为一**可行支付组合**(feasible payoff profile)。

▶定义 258.2 **可转移支付联盟博弈**$\langle N, v\rangle$的**核**(the core of the coalitional game $\langle N, v\rangle$ with transferable payoff)是可行支付组合$(x_i)_{i\in N}$的集
259 合,对于它没有满足对所有 $i\in S$ 有$y_i>x_i$ 的联盟 S 和 S—可行支付向量

$(y_i)_{i\in S}$。

一个很明显的等价定义是：核是一个满足对每个联盟 S 有 $v(S)\leqslant x(S)$ 的可行支付组合 $(x_i)_{i\in N}$ 的集合。所以核是一个满足弱线性不等式系统的支付组合集合并且因此是闭的和凸的。

下列例子表明了范围较广的可被模化为联盟博弈范围的情形并且阐释了核的概念。

◇例 259.1　(三人多数博弈)(A three-player majority game)假定三个参与人可获得一单位支付，他们中的任何两个若有独立于第三人的行动可获得 $\alpha\in[0,1]$，任何单独一个独立于其他两个人的行动将一无所得。我们可将这个情形模化为联盟博弈，在其中 $N=\{1,2,3\}$，$v(N)=1$，只要 $|S|=2$ 则 $v(S)=\alpha$，并且对所有 $i\in N$ 有 $v(\{i\})=0$。这个博弈的核是所有非负支付组合 (x_1,x_2,x_3) 的集合，对于它有 $x(N)=1$ 及对每个两个参与人的联盟 S 有 $x(S)\geqslant\alpha$。因此核非空当且仅当 $\alpha\leqslant 2/3$。

◇例 259.2　一支 n 人探险队发现了山中的宝藏，他们中的每一对都能拿到一份。模化这个情形的联盟博弈是 $\langle N,v\rangle$，这里

$$v(S)=\begin{cases}|S|/2 & \text{若}|S|\text{是偶数}\\ (|S|-1)/2 & \text{若}|S|\text{是奇数。}\end{cases}$$

如果 $|N|\geqslant 4$ 是偶数，那么核包括惟一的支付组合 $(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2})$。如果 $|N|\geqslant 3$ 是奇数那么核是空的。

?练习 259.3　(产品经济)(A production economy)一个资本家拥有一家工厂并且 w 个工人中的每一个仅拥有他自己的劳动力。工人自己不能生产任何东西；与资本家一起，任意 m 个工人的人群能产生产出值 $f(m)$，这里 $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ 是满足 $f(0)=0$ 的一个凹的非递减函数。模化这个情形的一个联盟博弈是 $\langle N,v\rangle$，这里 $N=\{c\}\cup W$（参与人 c 是资本家，W 是工人的集合）并且

$$v(S)=\begin{cases}0 & \text{若 } c\notin S\\ f(|S\cap W|) & \text{若 } c\in S\text{。}\end{cases}$$

试证明这个博弈的核是 $\{x\in\mathbb{R}^N: 0\leqslant x_i\leqslant f(w)-f(w-1), i\in W$ 且 $\sum_{i\in N}x_i=f(w)\}$，这里 $w=|W|$，并解释这个集合的元素。(也可参看练习 268.1，289.1，295.2)

260 ◇例 260.1 (不可分割商品市场)在一个不可分割商品市场,买主集合为 B,卖主集合为 L。每个卖主拥有一单位商品并且有保留价格 0(reservation price);每个买主希望购买一单位商品并且有保留价格 1。

我们可将这个市场模化为一个可转移支付联盟博弈:$N = B \cup L$ 并且对每个联盟 S 有 $v(S) = \min\{|S \cap B|, |S \cap L|\}$。若 $|B| > |L|$,则核包括惟一的支付组合,其中每个卖主得到 1 且每个买主得到 0。为说明之,假设支付组合 x 在核中。令 b 为支付在所有买主的支付中最小的买主,并令 l 为支付在所有卖主的支付中最小的卖主。因为 x 在核中,所以我们有 $x_b + x_l \geqslant v(\{b, l\}) = 1$ 且 $|L| = v(N) = x(N) \geqslant |B| x_b + |L| x_l \geqslant (|B| - |L|)x_b + |L|$,它蕴含了 $x_b = 0$ 和 $x_l \geqslant 1$ 且因此(应用 $v(N) = |L|$ 和 l 是最差卖主的事实)对每个卖主 i 有 $x_i = 1$。

?练习 260.2 试计算和解释当 $|B| = |L|$ 时这个博弈的核。

◇例 260.3 (多数博弈)(A majority game)一个有 n 个参与人的人群(当 $n \geqslant 3$ 时为奇数)有一单位支付在它的成员间分配。包括多数参与人的一个联盟可按它希望的那样在它的成员间分配这个支付。该情形由联盟博弈 $\langle N, v\rangle$ 模化,在其中 $|N| = n$ 并且

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{若} |S| \geqslant n/2 \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

由下列证明该博弈有一空核。假设 x 在核中。若 $|S| = n - 1$ 则 $v(S) = 1$ 所以 $\sum_{i \in S} x_i \geqslant 1$。因为有 n 个大小为 $n - 1$ 的联盟,我们因此有 $\sum_{\{S: |S| = n-1\}} \sum_{i \in S} x_i \geqslant n$。另一方面

$$\sum_{\{S: |S| = n-1\}} \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in N} \sum_{\{S: |S| = n-1, S \ni i\}} x_i = \sum_{i \in N} (n-1) x_i = n - 1,$$

这是一矛盾。

?练习 260.4 (凸博弈)一个可转移支付联盟博弈 $\langle N, v\rangle$ 是凸的如果对所有联盟 S 和 T 有:

$$v(S) + v(T) \leqslant v(S \cup T) + v(S \cap T)$$

261 令 $\langle \{1, \cdots, n\}, v\rangle$ 为这样一种博弈且定义支付组合 x 为对每个 $i \in N$ 有 $x_i = v(S_i \cup \{i\}) - v(S_i)$,这里 $S_i = \{1, \cdots, i-1\}$ $(S_1 = \phi)$。试证明 x 在 $\langle \{1, \cdots, n\}, v\rangle$ 的核中。

⑦练习261.1 (简单博弈)一个可转移支付联盟博弈$\langle N, v\rangle$是**简单的**(simple)如果对每个联盟S有$v(S)$为0或1并且$v(N)=1$,满足$v(S)=1$的联盟S被称为一个**胜利联盟**(winning coalition),一个属于全部胜利联盟的参与人是**一否决参与人**(veto player)。

a. 试证明若没有否决参与人则核是空的。

b. 试证明如果否决参与人的集合是非空的,那么核是将零赋给别的全部参与人所有非负可行支付组合的集合。

⑦练习261.2 (零和博弈)(zerosum games)一个可转移支付联盟博弈$\langle N, v\rangle$是**零和的**(zerosum)如果对每个联盟S,有$v(S)+v(N\setminus S)=v(N)$,它是**可加的**(additive),如果对所有不相交的联盟S和T有$v(S)+v(T)=v(S\cup T)$。试证明一个非可加的零和博弈有一空核。

早先我们提过当将任一联盟的行动影响它的其余部分的情形模化为一个联盟博弈时,可能有好几种定义$v(S)$的方法,每一种定义都有一个不同的解释。下一个练习请你将$v(S)$定义为S独立于$N\setminus S$的行动所能保证的最高支付。

⑦练习261.3 (污染湖)n个工厂中的每一个都从同一湖中取水并将废水排回湖中。每个工厂都需要纯净水。任一工厂都需要花费kc去净化其水的供应,这里k是对废水不进行处理而直接排入湖中的工厂的数目;任一工厂需花费b去处理它的废水。假定$c\leqslant b\leqslant nc$。

a. 假设任一联盟S的值$v(S)$是S能保证的最高支付,将此情形模化为联盟博弈(即,$v(S)$是在没有别的工厂处理它的废水假设下S的最高支付。)

b. 试找出博弈有一非空核的条件及核是一单元素集的条件。

c. 在考虑$v(S)$的定义做了关于S之外参与人的行动的假设条件下,试讨论该博弈核的解释。

13.3 核的非空性

262

我们现在导出一个联盟博弈的核非空的条件。因为核是由一个线性不等式系统定义的,所以这样一个条件可从一般不等式系统解的存在条件导

出。不过，因为用于定义核的不等式系统有一特别的结构，所以我们能导出一个更具体的条件。

用$\mathcal{C}$表示所有联盟集合，对任一联盟S用$\mathbb{R}^S$表示维数由S的成员确定的$|S|$维欧氏空间，给定

$$(1_S)_i=\begin{cases}1 & 若\ i\in S\\ 0 & 否则。\end{cases}$$

用$1_S\in\mathbb{R}^N$表示S的特征向量。$[0,1]$中的数族$(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$是一**平衡权数族**(balanced collection of weights)，如果对每个参与人i关于所有包含i的联盟的λ_S的和是1：$\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S 1_S=1_N$。作为一个例子，令$|N|=3$。那么：若$|S|=2$则$\lambda_S=\frac{1}{2}$；否则$\lambda_S=0$的数族$(\lambda_S)$是一平衡权数族；满足：若$|S|=1$则$\lambda_S=1$，否则$\lambda_S=0$的数族$(\lambda_S)$也是平衡权数族。博弈$\langle N,v\rangle$是**平衡的**(balanced)如果对每个平衡权数族有$\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S v(S)\leqslant v(N)$。

关于平衡博弈概念的一个解释如下，每个参与人有一单位时间，他必须在所有他成为其中一员的联盟间将它进行分配。为了在λ_S部分时间联盟S是活动的，则它的所有成员在这个时间部分也必须是在S中活动的，在此情形中联盟产生支付$\lambda_S v(S)$。在这个解释中权数族为平衡的条件是一个关于参与人时间分配的可行条件。并且一个博弈是平衡的如果没有给参与人产生多于$v(N)$支付的可行时间分配。

下列结论被称为 Bondareva-shapley 定理。

■**命题 262.1** 一个可转移支付联盟博弈有一非空核当且仅当它是平衡的。

证明：令$\langle N,v\rangle$为一可转移支付联盟博弈。首先令x为$\langle N,v\rangle$核中一支付组合，并且令$(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$为一平衡权数族。那么

$\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S v(S)\leqslant\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S x(S)=\sum_{i\in N}x_i\sum_{S\ni i}\lambda_S=\sum_{i\in N}x_i=v(N)$，所以$\langle N,v\rangle$是平衡的。

263 现在假设$\langle N,v\rangle$是平衡的。那么没有平衡权数族$(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$使得$\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S v(S)>v(N)$。因此凸集$\{(1_N,v(N)+\epsilon)\in\mathbb{R}^{|N|+1}:\epsilon>0\}$不交于凸锥体。

$\{y\in\mathbb{R}^{|N|+1}:y=\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S(1_S,v(S))$，这里对所有$S\in\mathcal{C}$有$\lambda_S\geqslant 0\}$，因为若不是这样，那么$1_N=\sum_{S\in\mathcal{C}}\lambda_S 1_S$，因此$(\lambda_S)_{S\in\mathcal{C}}$是一平衡权数族并

且$\sum_{S\in C}\lambda_S v(S)>v(N)$。因此由分离超平面定理(例如可参看 Rockafeller (1970, Theorem11.3))有一非零向量$(\alpha_N,\alpha)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$使得对所有锥体中的 y 和所有 $\epsilon>0$ 有

$$(\alpha_N,\alpha)\cdot y\geqslant 0>(\alpha_N,\alpha)\cdot(1_N,v(N)+\epsilon\ ) \qquad (263.1)$$

因为$(1_N,\nu(N)$在核中,我们有 $\alpha<0$)。

现在令 $x=\alpha_N/(-\alpha)$。因为$(1_S,v(S))$对所有 $S\in C$ 是在锥体中的,所以由(263.1)左边的不等式我们有 $x(S)=x\cdot 1_S\geqslant v(S)$,且由右边的不等式有 $v(N)\geqslant 1_N x=x(N)$。给 x 加上一个元素为非负的向量得到 $v(N)=x(N)$,我们得到在$\langle N,v\rangle$的核中的一个支付组合。 □

?练习 263.2 令 $N=\{1,2,3,4\}$。试证明满足

$$v(S)=\begin{cases}1 & \text{若 } S=N\\ \frac{3}{4} & \text{若 } S=\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\text{或}\{2,3,4\}\\ 0\end{cases}$$

的博弈$\langle N,v\rangle$有一空核。证明可应用下列事实:存在一满足对所有不等价于$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{1,4\}$或$\{2,3,4\}$的联盟 S 有 $\lambda_S=0$ 的平衡权数族$(\lambda_S)_{S\in C}$。

13.4 可转移支付市场

13.4.1 定义

在本节我们将核的概念应用于一个经典经济模型。在该经济中的每个代理人都被赋予一些商品,它们可用作在代理人操作的生产过程中所用的投入品。所有生产过程产生相同产出,它可在代理人间进行转移。正式地,一个**可转移支付市场**(market with transferable payoff)包括:

- 一个有限集合 N(代理人集合)
- 一个正整数 l(投入商品的数量) 264
- 对每个代理人 $i\in N$ 的一个向量 $\omega_i\in\mathbb{R}^l_+$(参与人 i 的禀赋)
- 对每个代理人 $i\in N$ 的一个连续、非递减且凹的函数 $f_i:\mathbb{R}^l_+\to\mathbb{R}_+$(参与人 i 的生产函数)

一个投入向量是$\mathbb{R}^l_+$的一个元素，满足$\sum_{i\in N} z_i = \sum_{i\in N}\omega_i$的一个投入向量组合$(z_i)_{i\in N}$是一个分配。

在这样一种市场中，代理人通过合作会有所得：如果他们所得的商品是互补性的，那么为了产出的最大化他们需要交换投入。不过，只要涉及合作好处的分配则代理人的利益就会有冲突。因此需要博弈论的分析。

我们可以用转移支付联盟博弈$\langle N, v\rangle$来模化可转移支付市场$\langle N, l, (\omega_i), (f_i)\rangle$，其中 N 是代理人集合且对每个联盟S 我们有

$$v(S)=\max_{(z_i)_{i\in S}}\left\{\sum_{i\in S} f_i(z_i): z_i\in\mathbb{R}^l_+ \text{且} \sum_{i\in S} z_i=\sum_{i\in S}\omega_i\right\}. \qquad (264.1)$$

即，$v(S)$是 S 的成员自己产生的最大全部产出。我们定义**一个市场的核**(core of a market)为相联系的联盟博弈的核。

注意我们的下列假设是根本性的：所有代理人生产同种商品并且任一联盟 S 的产出独立于$N\setminus S$ 的行为。

13.4.2 核的非空性

我们现在使用 Bondareva-Shapley 定理(262.1)证明每个可转移支付市场有一非空核。

■命题 264.2 每个可转移支付市场有一非空核。

证明：令$\langle N, l, (\omega_i), (f_i)\rangle$为一可转移支付市场并令$\langle N, v\rangle$为在(264.1)中定义的联盟博弈。由 Bondareva-Shapley 定理可充分证明$\langle N, v\rangle$是平衡的。令$(\lambda_S)_{S\in C}$为一平衡权数族。我们必须证明$\sum_{S\in C}\lambda_S v(S)\leqslant v(N)$。对每个联盟 S 令$(z_i^S)_{i\in S}$为定义$v(S)$的问题(264.1)的一个解。对每个$i\in N$ 令$z_i^*=\sum_{S\in C, S\ni i}\lambda_S z_i^S$。我们有

265

$$\sum_{i\in N} z_i^* = \sum_{i\in N}\sum_{S\in C, S\ni i}\lambda_S z_i^S = \sum_{S\in C}\sum_{i\in S}\lambda_S z_i^S \sum_{S\in C}\lambda_S \sum_{i\in S} z_i^S$$
$$=\sum_{S\in C}\lambda_S\sum_{i\in S}\omega_i=\sum_{i\in N}\omega_i\sum_{S\in C, S\ni i}(\lambda_S)=\sum_{i\in N}\omega_i,$$

这里最后一个等式来自于$(\lambda_S)_{S\in C}$是一平衡权数族这一事实。由$v(N)$的定义可知$v(N)\geqslant\sum_{i\in N} f_i(z_i^*)$；每个函数$f_i$的凹性及权数族是平衡的蕴含了

$$\sum_{i\in N} f_i(z_i^*)\geqslant\sum_{i\in N}\sum_{S\in C, S\ni i}\lambda_S f_i(z_i^S)=\sum_{S\in C}\lambda_S\sum_{i\in S} f_i(z_i^S)=\sum_{S\in C}\lambda_S v(S),$$

至此完成了证明。 □

◇例 265.1 考虑下列可转移支付市场：$N=K\cup M$，有两种投入商品（$l=2$），若 $i\in K$ 则 $\omega_i=(1,0)$，若 $i\in M$ 则 $\omega_i=(0,1)$，并且对每个 $i\in N$ 有 $f_i(a,b)=\min\{a,b\}$。那么 $v(S)=\min\{|K\cap S|,|M\cap S|\}$。由命题 264.2 核是非空的。若 $|K|<|M|$ 则包含惟一一个点，在其中每个 K 中的代理人得到支付 1，且每个 M 中的代理人得到支付 0；证明类似于例 260.1 中的一个可分割商品市场的证明。

?练习 265.2 考虑像上个例子中一样的可转移支付市场，其中有五个代理人，$\omega_1=\omega_2=(2,0)$，$\omega_3=\omega_4=\omega_5=(0,1)$。

a. 试找出这个市场的联盟形式并计算核。

b. 假设代理人 3, 4, 5 组成一个辛迪加：他们只以一个整体进入联盟，所以我们有一个三人博弈，试问：核预示了辛迪加的组成有利于它的成员吗？解释你的答案。

13.4.3 核与竞争均衡

经典经济学理论定义了一个市场的"竞争均衡"的解。我们现在证明一个市场的核包含了它的竞争均衡。

我们从一个简单情形开始，在其中所有代理人有相同的生产函数 f 和仅有一种投入。令 $\omega^*=\sum_{i\in N}\omega_i/|N|$，为平均的禀赋。给定 f 的凹性，每个代理人接受数量为 ω^* 的投入的分配使整个产出最大化。令 p^* 为在 ω^* 与生产函数相切的切线斜率，并令 g 为满足 $g(\omega^*)=f(\omega^*)$。且斜率为 p^* 的仿射函数(参看图 266.1)。那么$(g(\omega_i))_{i\in N}$在核中，因为 $v(S)=|S|f((\sum_{i\in S}\omega_i)/|S|)\leqslant|S|g((\sum_{i\in S}\omega_i)/|S|)=\sum_{i\in S}g(\omega_i)$ 和 $v(N)=|N|f((\sum_{i\in S}\omega_i)/|N|)=|N|f(\omega^*)=|N|g(\omega^*)=\sum_{i\in N}g(\omega_i)$。 266

支付组合$(g(\omega_i)_{i\in N}$可通过每个代理人在价格 p^* 用投入品交换产出品获得(每单位投入品花费 p^* 单位产出)：如果在这个价格，交易是可行的，则代理人 i 通过选择 z 数量的投入品来最大化他的支付从而解决 $\max_z(f(z)-p^*(z-\omega_i))$，它的解是 ω^*。按照下面定义的说法，二元组$(p^*,(z_i^*)_{i\in N})$(这里对所有 $i\in N$ 有 $z_i^*=\omega^*$)是市场的一个竞争均衡。

我们定义可转移支付市场的一个**竞争均衡**(competitive equilibriam)为一个二元组$(p^*,(z_i^*)_{i\in N})$，它包括一个向量 $p^*\in\mathbb{R}_+^l$(投入品价格矩阵)和一个分配$(z_i^*)_{i\in N}$使得对每个代理人 i，向量(z_i^*)解决了问题

$$\max_{z_i\in\mathbb{R}_+^l}(f_i(z_i)-(p^*(z_i-\omega_i)). \quad (266.1)$$

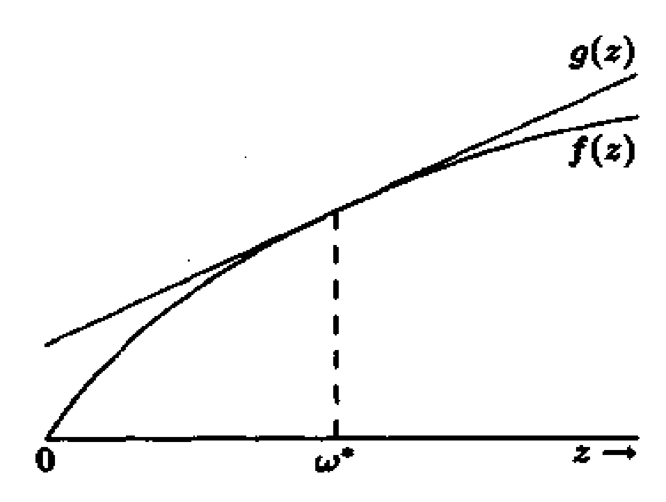


图 266.1 在一个仅有一种投入品的市场中，每个代理人的生产函数 f 和函数 g

如果$(p^*,(z_i^*)_{i\in N})$是一个竞争均衡，则我们称 $f_i(z_i^*)-p^*(z_i^*-\omega_i)$((式 266.1)中最大化的值)为**代理人 i 的竞争支付**(competitive payoff of agent i)。其思想是代理人能在固定价格交换投入品，它是用产出品单位来解释的。如果在买卖投入品之后，代理人 i 拥有投入 z_i，则他下一个花费是 $p^*(z_i-\omega_i)$(用产出品单位)；他能产出 $f_i(z_i)$个单位的产出品，所以他的净支付是 $f_i(z_i)-p^*(z_i-\omega_i)$。如果当每个代理人选择他的交易去最大化他的支付时，所得的投入向量组合$(z_i^*)_{i\in N}$在它是一种分配的意义下是可行的，那么价格向量 p^* 产生一个竞争均衡。

267 我们现在证明可转移支付市场中任一竞争支付组合都在核中。

■**命题 267.1** 在一个可转移支付市场中每一个竞争支付组合都在市场的核中。

证明：令$\langle N,l,(\omega_i),(f_i)\rangle$为一可转移支付市场，令$\langle N,v\rangle$为相联系的联盟博弈，令$(p^*,(z_i^*)_{i\in N})$为市场的一个竞争均衡，并假定与结论相反，相联系的竞争支付组合不在核中。那么有一个联盟 S 和一个向量$(z_i)_{i\in S}$使得$\sum_{i\in S}z_i=\sum_{i\in S}\omega_i$ 并且$\sum_{i\in S}f_i(z_i)>\sum_{i\in S}(f_i(z_i^*)-p^*z_i^*+p^*\omega_i)$。从而$\sum_{i\in S}(f_i(z_i)-p^*z_i)>\sum_{i\in S}(f_i(z_i^*)-p^*z_i^*)$且因此对至少一个代理人 $i\in S$ 我们有$f_i(z_i)-p^*z_i>f_i(z_i^*)-p^*z_i^*$，这与 z_i^* 是式(266.1)的一个解这一事实相矛盾。最后，$v(N)=\sum_{i\in N}f_i(z_i^*)$，这是因为对任何$(z_i)_{i\in N}$使得$\sum_{i\in N}z_i=\sum_{i\in N}\omega_i$ 我们有$\sum_{i\in N}f_i(z_i)\leqslant\sum_{i\in N}(f_i(z_i^*)-p^*z_i^*+p^*\omega_i)=\sum_{i\in N}f_i(z_i^*)$。 □

命题 267.1 提供了一条可选择的证明可转移支付市场的核是非空的思路，因为如下列练习所表明，每个可转移支付市场有一竞争均衡。

?练习 267.2 令 $\langle N, l, (\omega_i), (f_i)\rangle$ 为一可转移支付市场，其中 $\sum_{i\in N}\omega_i$ 的每个成分是正的，对每个 $i\in N$，令 $X_i=\{(y_i, z_i)\in\mathbb{R}^l_+\times\mathbb{R}: y_i\leqslant f_i(z_i)\}$，并令 $\{z_i^*\}_{i\in N}$ 为下列问题的一个解。

$$\max_{\{z_i\}i\in N}\left\{\sum_{i\in N}f_i(z_i):服从\sum_{i\in N}z_i\leqslant\sum_{i\in N}\omega_i\right\}.$$

试证明将 $\sum_{i\in N}X_i$ 从 $\{(z, y)\in\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}: z\leqslant\sum_{i\in N}z_i^*$ 且 $y\geqslant\sum_{i\in N}f_i(z_i^*)\}$ 分离的超平面系数确定了竞争价格。

竞争均衡的概念试图阐释一个每个参与人的讨价还价能力都较小的世界。在一个仅有少数几个代理人的市场中，某些人可能有较强的讨价还价能力，并且核可能包含非常不同于竞争均衡的结果。不过，在一个大的市场中，每个代理人的行动对结果仅有很小的影响，我们可以期望核仅包含类似于竞争均衡的结果。下列练习在一个特殊情形中阐述了这个思想；在 13.6.2 节我们将在更一般的背景下研究这个思想。

?练习 268.1 （产品经济）令 $\langle N, l, (\omega_i), (f_i)\rangle$ 为一可转移支付市场，在其中 $N=\{1,\cdots,k+1\}$，$l=2$，$\omega_1=(1,0)$，对 $i\neq 1$ 有 $\omega_i=(0,1)$，并且对所有 $i\in N$，有 $f_i=f$，其满足对所有 m 有 $f(0,m)=0$，$f(1,0)=0$，$\lim_{m\to\infty}f(1,m)<\infty$。假定投入商品是不可分割的。相联系的联盟博弈同练习 259.3 中的博弈。试证明对所有 $\epsilon>0$ 存在一整数 $k^*(\epsilon)$ 使得对所有 $k>k^*(\epsilon)$ 没有核中的元素给参与人 1 一个少于 $f(1,k)-\epsilon$ 的支付。试给出该结论的一个经济解释。 268

13.5 无可转移支付的联盟博弈

在一个可转移支付联盟博弈中每个联盟 S 是以惟一的一个数 $v(S)$ 为显著特点的，其解释是：$v(S)$ 是一个可用任何方法在 S 的成员间进行分配的支付。我们现在研究一个更一般的概念，在其中每个联盟不必得到某个固定支付的所有分配；而且，每个联盟 S 是以一个任意的结果集合 $V(S)$ 为显著特征的。

▶定义 268.2　一个**联盟博弈**(coalitional game)(无可转移支付)包括：

- 一个有限集合 N(参与人的集合)
- 一个集合 X(结果集合)
- 一个对 N 的每一非空子集 S(一个联盟)赋一个集合 $V(S)\subseteq X$ 的函数 V
- 对每个参与人 $i\in N$ 有一个 X 上的偏好关系 $\succsim_i$。

任一个可转移支付联盟$\langle N, v\rangle$(定义 257.1)可如下与一个一般的联盟博弈$\langle N, X, V, (\succsim_i)_{i\in N}\rangle$相联系：$X=\mathbb{R}^N$，对每个联盟 S 有 $V(S)=\{x\in\mathbb{R}^N|:\sum_{i\in S}x_i=v(S)$并且若 $j\in N\setminus S$ 则有$x_j=0$，$x\succsim_i y$ 当且仅当 $x_i\geqslant y_i$。在这种联系下可转移支付联盟博弈集合是所有联盟博弈集合的一个子集合。

一般联盟博弈的核的定义是对我们可转移支付博弈的核的定义(定义 258.2)的自然推广。

▶定义 268.3　**联盟博弈**$\langle N, V, X, (\succsim_i)_{i\in N}\rangle$**的核**(the core of the coalitional game)是所有 $x\in V(N)$的集合；对于它不存在联盟 S 和满足对所有 $i\in S$ 有 $y\succ_i x$ 的 $y\in V(S)$。

269　在像可转移支付联盟博弈的平衡性条件(参看第 13.3 节)下，一般联盟博弈的核是非空的(参看 Scarf(1967)，Billera(1970)，Shapley(1973))。在这里我们不讨论这些条件。

13.6 交换经济

13.6.1 定义

可转移支付市场的一个推广如下，一个**交换经济**(exchange economy)包括：

- 一个有限集合 N(代理人集合)
- 一个正整数 l(投入商品的数量)
- 对每个代理人 $i\in N$ 的一个向量 $\omega_i\in\mathbb{R}^l_+$(代理人 i 的禀赋)，它使得 $\sum_{i\in N}\omega_i$ 的每个成分是正的。

• 对每个代理人 $i\in N$，一个在商品数量集合$\mathbb{R}^l_+$上的非递减的连续拟凹偏好关系$\succsim_i$。

其解释是：ω_i 是代理人 i 起初拥有的商品数量；要求$\sum_{i\in N}\omega_i$ 的每个成分是正的意味着在经济中存在一个可行的每种商品的正数量；商品可在代理人间进行转移，但没有可自由转移的支付。

一个**分配**(allocation)是经济中的全部禀赋在代理人间的分配：即，它是一个满足对所有 $i\in N$ 有 $x_i\in\mathbb{R}^l_+$和$\sum_{i\in N}x_i=\sum_{i\in N}\omega_i$ 的组合$(x_i)_{i\in N}$。交换经济的一个**竞争均衡**(competitive equilibrium)是一个二元组$(p^*,(x_i^*)_{i\in N}$，它包括：一个满足 $p^*\neq 0$ 的向量 $p^*\in\mathbb{R}^l_+$(价格向量)；一个分配$(x_i^*)_{i\in N}$，它使得对每个代理人 i 我们有$p^*x_i^*\leqslant p^*\omega_i$，并且对任一满足

$$p^*x_i\leqslant p^*\omega_i \text{ 的 } x_i \text{ 有 } x_i^*\succsim_i x_i。\qquad (269.1)$$

如果$(p^*,(x_i^*)_{i\in N})$是一竞争均衡那么$(x_i^*)_{i\in N}$是一**竞争分配**(competitive allocation)。

就像在可转移支付市场的竞争均衡的情形中一样，其思想是代理人能以固定价格交换商品。这里没有同质产品，价格是按此说法被解释的。不过，我们可认为 p_j^* 是商品j 的货币价格。给定任一价格向量 p，每个代理人 i 在所有这些买得起的代理人(即满足 $px_i\leqslant p\omega_i$)间选择一个最想要的商品。典型的是一个代理人选择这样一束商品，即某些商品多于而另一些商品少于他起初拥有的商品：他“需求”一些商品同时“供给”另一些。在竞 270 争均衡定义中要求选择的商品束的组合是一种分配，这意味着对每种商品个人需求的和等于他们供给的和。

经济理论中的一个标准结论是：在一个每个代理人的偏好关系是递增的交换经济中都有一个竞争均衡(例，可参看 Arrow 和 Hahn (1971, Theorem 5 on p.119)[①])。注意一个经济可能拥有很多这样的均衡。

一个包含两个代理人($|N|=2$)和两种商品($l=2$)的交换经济可在一个如图 270.1 中那样的图里被便利地表示，它被称为埃奇沃思盒(Edgeworth box)。由代理人 1 消费的商品组合从左下部的原点 O^1 开始测量，而由代理人 2 消费的商品组合从在右上部的原点 O^2 开始测量。由两对坐标轴形成的盒的宽度是在经济中商品 1 的全部禀赋，而盒的高度是商品 2 的全部 271 禀赋。因此在盒中的每个点 x 对应于给予商品的二元组。标记为 I_i 和 I'_i

① Arrow 和 Hahn 的结论是针对更一般的产品经济概念的。为了将它应用在这里，令每个公司 f 的产品集合为 $Y_f=\{0\}$。注意在每个代理人的偏好关系是递增的假设下，每个代理人对每个别的代理人是资源相关的(在 Arrow 和 Hahn 定义下)。

的两曲线是代理人 i 的无差异曲线：若 x 和 y 是这些曲线中某条线上的点，那么 $x \sim_i y$。通过 ω 和 x^* 的直线是(相对于 O^i)所有满足 $px_i = p\omega_i$ 的组合 x_i 的集合。点 x^* 对应于一个竞争分配，因为当从 O^i 度量时代理人 i 在集合 $\{x_i : px_i \leq p\omega_i\}$ 中最偏好的组合是 x^*。竞争价格的比率是通过 ω 和 x^* 的直线斜率的负值。

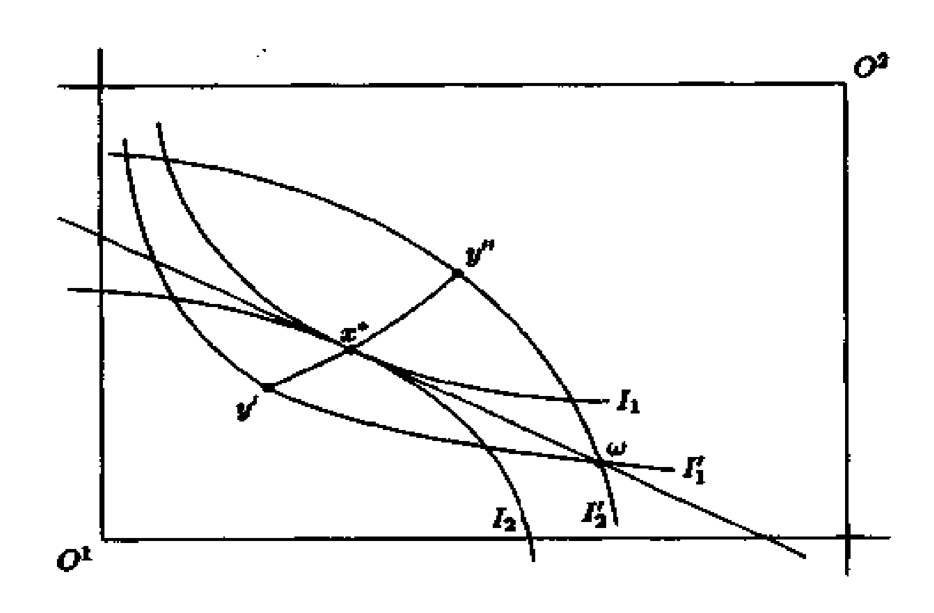


图 270.1　一个埃奇沃思盒，表示了一个有两个代理人和两种商品的交换经济。一个竞争均衡的价格比率由通过连接 ω 和 x^* 两点的直线斜率给出，x^* 对应于一个竞争分配。核是与连接 y' 和 y'' 的直线上的点相对应的全部分配的集合

交换经济是与市场(定义见第 13.4 节)紧密相关的。在一个市场中，支付能直接在代理人间进行转移，而在交换经济中只有商品能直接转移。因此我们将一个交换经济模化为一个无可转移支付联盟博弈。精确地，我们将交换经济 $\langle N, l, (\omega_i), (\succsim_i)\rangle$ 与联盟博弈 $\langle N, X, V, (\succsim_i)\rangle$ 相联系，这里

- $X = \{(x_i)_{i \in N} : x_i \in \mathbb{R}^l_+\}$ 对所有 $i \in N$
- 对每个联盟 S，$V(S) = \{(x_i)_{i \in N} \in X : \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S} \omega_i$，并且对所有 $j \in N \setminus S$，有 $x_j = \omega_j\}$
- 每个偏好关系 $\succsim_i$ 定义如下：$(x_j)_{j \in N} \succsim_i (y_j)_{j \in N}$ 当且仅当 $x_i \succsim_i y_i$。

第三个条件说明了每个代理人仅关心他自己消费的假设。我们定义**交换经济的核**(core of an exchange economy)为相联系的联盟博弈的核。

13.6.2 核和竞争均衡

对于与交换经济$\langle N,\ell,(\omega_i),(\succsim_i)\rangle$相联系的联盟博弈$\langle N,X,V,(\succsim_i)\rangle$，集合$V(N)$是所有分配的集合且对每个$j\in N$我们有$V(\{j\})=\{(\omega_i)_{i\in N}\}$。因此两个代理人经济的核是对每个代理人$j$使得$x_j\succsim_j\omega_j$的所有分配$(x_i)_{i\in N}$的集合，并且不存在分配$(x'_i)_{i\in N}$使得对两个代理人$j$有$x_j'\succ_j x_j$。例如，在图270.1中的埃氏盒里，核对应于在由$I'_1$和$I'_2$所界定区域中的焦点，与之相对，代理人1的一条无差异曲线与代理人2的一条无差异曲线共一条公共切线(即，它是通过y'，x^*和y''的曲线)。特别地，核包含了竞争分配。我们现在证明这具有一般性质。 272

■命题272.1 在一个交换经济中每个竞争分配都在核中。

证明：令$E=\langle N,l,(\omega_i),(\succsim_i)\rangle$为一交换经济，令$(p^*,(x_i^*)_{i\in N})$为$E$的一竞争均衡，并假定$(x_i^*)_{i\in N}$不在$E$的核中。那么有一个联盟$S$和满足$\sum_{i\in S}y_i=\sum_{i\in S}\omega_i$的$(y_i)_{i\in S}$使得对所有$i\in S$有$y_i\succ_i x_i^*$；应用(269.1)我们有：对所有$i\in S$有$p^*y_i>p^*\omega_i$。因此$p^*\sum_{i\in S}y_i>p^*\sum_{i\in S}\omega_i$，这与$\sum_{i\in S}y_i=\sum_{i\in S}\omega_i$相矛盾。 □

注意从这个结论可知一个具有竞争均衡的经济有一个非空核。

通过考察一个埃氏盒，我们会看到在一个两类商品和两个代理人的经济中核可能是大的。不过，我们现在要证明：随着代理人数量增加，核缩减到竞争分配集合。即，在一个足够大的经济中竞争均衡的预测——这个概念建立在以一个固定价格进行交易的代理人基础上——非常接近核的预测——这个概念建立在一个代理人群通过形成一个自立的子经济而不考虑价格来提高它的数量的能力基础上。换言之，在一个足够大的经济中不受代理人群偏离影响的结果仅是竞争均衡分配。

为了精确地陈述结论，令E为一个有n个代理人的交换经济。对任一正整数k，令kE为派生于E的有kn个代理人的经济——E中每个代理人的k个复制。我们称kE中为E中代理人i的一个复制的代理人j为类型$i=\iota(j)$。E的核与kE的核间的比较由下列结论给出。

■引理272.2 (核中平等对待)令E为一个每个代理人的偏好关系是

递增和严格拟凹的交换经济,并令 k 为一个正整数。在 kE 核的任一分配中所有相同类型的代理人得到相同的商品束。

证明:令 $E=\langle N,l,(\omega_i),(\succsim_i)\rangle$ 并令 x 为 kE 核中的一个分配,在其中有两个类型为 t^* 的代理人,他们的商品束不一样。我们现在证明存在一个包含每个类型最差代理人的联盟的禀赋分配,该分配使得该联盟的每个成员比他在 x 中更好。精确地说,对每个类型 t 选择 kE 中的一个代理人 i_t,他在所有类型 t 的代理人中在 x 中是最不好的(根据 $\succsim_t$),并令 S 为这些代理人的联盟(大小为 $|N|$)。对每个类型 t 令 z_t 为类型 t 的代理人在分配 x 中的平均商品束:$z_t=\sum_{\{j:\iota(j)=t\}}x_j/k$。那么我们有

273

- $\sum_{t\in N}z_t=\sum_{t\in N}\omega_t$;
- $z_t\succsim_t x_{i_t}$(否则,只要 $\iota(j)=t$ 则 $z_t\prec_t x_j$,所以由 $\succsim_t$ 的拟凹性我们有 $z_t\prec_t z_t$,这是一个矛盾);
- $z_{t^*}\succ_{t^*}x_{i_{t^*}}$(由偏好关系的严格拟凹性)。

那也是,(i)对联盟 S 将商品束 $z_{\iota(j)}$ 赋给每个代理人 $j\in S$ 是可行的(因为 $\sum_{j\in S}z_{\iota(j)}=\sum_{t\in N}z_t=\sum_{j\in S}\omega_i$),(ii)对每个代理人 $j\in S$ 商品束 $z_{\iota(j)}$ 至少与 x_j 一样是值得要的,(iii)对类型 t^* 的代理人 $j\in S$,商品束 $z_{\iota(j)}$ 优于 x_j。

因为每个代理人的偏好关系是递增的,所以我们可通过将 t^* 的商品束减少一个小数量并将这个数量均等地在 S 的别的成员间进行分配,以调整分配 $(z_t)_{t\in N}$,故我们有满足 $\sum_{t\in N}z_t'=\sum_{t\in N}\omega_t$ 和对所有 $j\in S$ 有 $z'_{\iota(j)}\succ_{\iota(j)}x_j$ 的一个组合 $(z'_t)_{t\in N}$。这与 x 在 kE 的核中这一事实相矛盾。 □

给定这个结论,对任一正整数 k 我们可用一个包含 $|N|$ 个商品束的组合来等同于 kE 的核,每个类型有一个。在这种同化下,kE 的核是 k 的核的一个子集是显然的。我们现在证明 kE 的核随 k 增加而减缩到 E 的竞争分配集合。

■**命题 273.1** 令 E 为一个交换经济,在其中每个代理人的偏好关系是递增的和严格拟凹的,并且每个代理人的每种禀赋都是正的。令 x 为 E 中的一分配。如果对每个正整数 k,在 kE 中的每个类型 t 的每个代理人得到商品束 x_i 的分配是在 kE 的核中,那么 x 是 E 的一竞争分配。

证明:令 $E=\langle N,l,(\omega_i),(\succsim_i)\rangle$。令

$$Q=\left\{\sum_{t\in N}\alpha_t z_t:\ \sum_{t\in N}\alpha_t=1,\ \alpha_t\geqslant 0,\ \text{且}\ z_t+\omega_t\succ_t x_t\text{对所有}\ t\right\}。$$

在我们关于偏好的假设下 Q 是凸的。我们说 $0\notin Q$。假设与之相反,对某个满足 $\sum_{t\in N}\alpha_t=1(\alpha_t\geqslant 0)$ 及对所有 t 有 $z_t+\omega_t\succ_t x_t$ 的 (α_t) 和 (z_t) 有 $0=$

$\sum_{t\in N}\alpha_t z_t$。假设每个 α_t 是一有理数。(若不是,我们需做某种近似)这样一个足够大的正整数 K 使得 $K\alpha_t$ 对所有 t 都是正整数。令 S 为一个在 KE 中包含每个类型 t 的 $K\alpha_t$ 个代理人的联盟,并对每个 $i\in S$ 令 $x'_i = z_{t(i)} + \omega_i$ 我们有 $\sum_{i\in S}x'_i = \sum_{t\in N}K\alpha_t z_t + \sum_{i\in S}\omega_i = \sum_{i\in S}\omega_i$ 和对所有 $i\in S$ 有 $x'_i \succ_i x_i$,这与 x 在 KE 核中这一事实相矛盾。

274

现在由分离超平面定理(例可参看 Rockafeller (1970, 定理 11.3))存在一非零向量 $p\in\mathbb{R}^l$ 使得若 $z\in Q$ 则 $pz\geqslant 0$。因为所有代理人的偏好是递增的,所以每个单位向量在 Q 中(对每个 t 取 $z_t = x_t - \omega_t + 1_{|m|}$ 和 $\alpha_t = 1/|N|$,这里 $1_{|m|}$ 是 $\mathbb{R}^l$ 中的第 m 个单位向量)。故 $p\geqslant 0$。

我们现在证明若对某个 $i\in N$ 有 $y_i\succ_i x_i$,那么 $py_i > p\omega_i$,所以由(269.1) x 是 E 的一竞争分配。假设 $y_i \succ_i x_i$,那么 $y_i - \omega_i\in Q$,所以由 p 的选择我们有 $py_i\geqslant p\omega_i$。而且,对某个 $\theta<1$,有 $\theta y_i\succ_i x_i$,所以 $\theta y_i - \omega_i \in Q$。并因此 $\theta py_i \geqslant p\omega_i$;同样 $p\omega_i > 0$,因为 ω_i 的每个成分都是正的。故 $py_i > p\omega_i$。 □

在 kE 的任一竞争均衡中,同类的所有代理人消费同样的商品束,所以任一这种均衡自然地与 E 的一竞争均衡相联系。因此该结论表明这样一种意义:k 越大,核和 kE 的竞争分配集合就越靠近。

? 练习 274.1 考虑一个这样的交换经济:有两种商品和两个代理人,代理人 1 的禀赋是(1,0)且她的偏好由效用函数 $x_1 + x_2$ 表示,而代理人 2 的禀赋是(0,1),且他的偏好由效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示。对每个正整数 k 试找出核和 kE 的竞争分配集合。

[注解]

联盟博弈的概念应归于 von Neumann 和 Morgenstern(1944)。在 19 世纪 50 年代早期 Gillies 引进核的概念作为研究稳定集合的一个工具(他的工作发表在 Gillies(1959);Shapley 和 Shubik 把它发展为一个解的概念,命题 262.1 应归于 Bondareva(1963)和 Shapley(1967)。将市场模型化为联盟博弈的思想应归于 von Neumann 和 Morgenstern(1944, pp. 583 - 584);它是由 Shapley 和 Shubik 发展的(例可参看 Shapley(1959)和 Shubik(1959a))。命题 264.2 应归于 Shapley 和 Shubik(1969a).将联盟博弈推广到支付不可转

移的情形应归于 Shapley 和 Shubik(1953)和 Luce 和 Raiffa(1957, pp.234—275 235)，我们所描述的系统表示应归于 Aumann 和 Peleg(1960)。Scarf (1967), Billera(1970)和 Shapley(1973)讨论了无可转移支付联盟博弈的核的非空性。核与经济的竞争均衡集合间的关系首先由 Edgeworth(1881, pp.35—39)注意到。Edgeworth 的工作与现代博弈理论概念间的关系由 Shubik(1959a)重新认识。命题 273.1 应归于 Debreu 和 Scarf (1963)；关于两个代理人和两种商品经济的图形证明可参看 Varian(1992, pp. 387—392)。

例 259.2 应归于 Shapley(受 1948 的电影《施纳·马德勒的宝藏》的启发)。练习 259.3 的博弈由 Shapley 和 Shubik(1967)分析。例 260.1 的市场由 Shapley(1959)研究。练习 260.4 取自于 Shapley(1971/72)，练习 261.3 来自于 Shapley 和 Shubik(1969b)，练习 265.2 来自于 Postlewaite 和 Rosenthal(1974)，练习 268.1 来自于 Owen(1982, Theorem Ⅸ.3.2)。

Aumann(1989)包括了对联盟博弈的一个介绍。另一些参考资料包括 Owen(1982), Shubik(1982), Moulin(1986, 1988), Friedman(1990)和 Myerson(1991)。

Aumann(1964)对 Edgeworth 的在一个大经济中核收敛于竞争均衡集合这一思想提供了一个可选择的系统表达：他研究了一个代理人连续体的模型并证明了核与竞争均衡集合相一致。核的公理化由 Peleg(1992)考察。

第 14 章

稳定集合、讨价还价集合及夏普里值

与核的概念相反，在本章我们所研究的解的概念通过要求每个可能的偏离(要么它自己是一稳定结果，要么它被一个反偏离平衡)来限制一个持异议的联盟可能偏离的方式。这些限制产生了几个解：稳定集合，讨价还价集合、内核、核仁和夏普里值。

14.1 两种方法

核的定义除了加上一个可行性约束之外，并没有限制一个联盟的可信偏离。特别地它假设任何偏离是事件的结束并且忽略了这样的事实，即一个偏离可能引起两个导致不同最终结果的反应。本章我们所研究的解的概念考虑了由此所引发的偏离的各种限制。

在我们研究的第一种方法(在第 14.2 节)中，一个联盟对一结果的异议包括了一个本身局限为稳定的可选择结果。其思想是联盟的偏离可能通过一系列事件导致一个稳定结果，并且联盟应该根据它行动的最终结果而非近似结果来选择偏离。这个稳定性条件是自反的：一个稳定结果的性质是没有任何联盟能获得另一个增加它所有成员节好处的稳定结果。

在第二种方法中(第 14.3 和 14.4 节研究)由一偏离引发的事件链在两个阶段后被停止：稳定性条件是对每个关于某结果的异议总存在一个平稳反异议。异议与反异议的不同概念导致了很多不同的解的概念。

本章中对于解的概念所运用的论证是很吸引人的。不过，在我们的印 278

象中概念合理性的应用并不多，因此我们只是简单描述概念，讨论它们的解释并给出简单的例子。从始至终我们将注意力限于可转移支付联盟博弈。

14.2 冯·诺依曼和摩根斯坦恩的稳定集合

我们所研究的第一种解的概念隐含的思想是：不满意 $v(N)$ 现有分配结果的联盟 S 可以置信地提出这样一个 $v(N)$ 的稳定分配 x 来反对，即对 S 的所有成员都更好并由对自己实行 $(x_i)_{i\in S}$ 的威胁来支持（通过在它的成员间分配 $v(S)$ 的值）。要求异议本身为稳定的逻辑是：否则异议可能促发一个别的联盟进一步反对的过程，在此过程结束时偏离联盟的一些成员状况可能更好。

该思想导致了一个稳定结果集合满足两个条件的定义：（ⅰ）对每一个非稳定的结果某个联盟有一可置信的异议；（ⅱ）对任一稳定结果没有联盟有可置信的异议。注意这个定义是自反的并且承认了有很多稳定集合的可能性。

我们现在转向正式定义。令 $\langle N,v\rangle$ 为一可转移支付联盟博弈。同前一章一样我们假设 $\langle N,v\rangle$ 是凝聚性的（参看定义258.1）。$\langle N,v\rangle$ 的一个**分配**（imputation）是一可行支付组合 x，它满足对所有 $i\in N$ 有 $x_i\geqslant v(\{i\})$；令 X 为 $\langle N,v\rangle$ 的所有分配的集合。我们首先定义异议（它不必是可置信的）。

- 一个分配 x 是**联盟 S 对分配 y 的一个异议**（an objection of the coalition s to the imputation y）如果对所有 $i\in S$ 有 $x_i>y_i$ 同时 $x(S)\leqslant v(S)$，在此情形中我们写作 $x\succ_S y$。

（在经典文献中有时说"x 通过 S 优于 y"，如果 x 是 S 对 y 的一个异议。）因为 (N,v) 是凝聚性的，所以我们有 $x\succ_S y$ 当且仅当有一满足对所有 $i\in S$ 有 $x_i>y_i$ 的 S 一可行支付向量 $(x_i)_{i\in S}$。博弈 (N,v) 的核是所有没有异议的分配的集合：$\{y\in X$：没有联盟 S 和分配 x 使得 $x\succ_S y\}$。我们现在研究的解的概念定义如下。 279

▶定义 279.1 可转移支付联盟博弈 $\langle N,v\rangle$ 的分配集合 X 的一个子集 Y 是一**稳定集合**（stable set），如果它满足下列两条件。

内部稳定性（Internal stability）若 $y\in Y$ 则对任何 $z\in Y$ 不存在联盟 S

使得 $z \succ_S y$。

外部稳定性(External stability)若 $z \in X \setminus Y$ 那么存在 $y \in Y$ 使得对某个联盟 S 有 $y \succ_S z$。

该定义亦可写为：对任一分配集合 Y，令 $\mathcal{D}(Y)$ 为满足有一联盟 S 和有一分配 $y \in Y$ 使得 $y \succ_S z$ 的分配 z 的集合。那么内部和外部稳定性等价于条件 $Y \subseteq X \setminus \mathcal{D}(Y)$ 和 $Y \supseteq X \setminus \mathcal{D}(Y)$，所以一个分配集合 Y 是一个稳定集合当且仅当 $Y = X \setminus \mathcal{D}(Y)$。

当核是惟一的分配集合时，一个博弈可能有不止一个稳定集合(见下例)或根本没有(如在 Lucas(1969)中复杂例子所证明)；每个这种集合可能包含很多分配。von Neumann and Morgenstern(1944)解释每个稳定集合对应于一个**行为标准**(standard of behavior)，其思想是，任一给定的稳定集合中的所有分配对应于某个行为模式，而在不同稳定集合中的分配对应于不同的行为模式。

稳定集合的一些简单性质由下列结论给出。

■命题 279.2　a. 核是每个稳定集合的一个子集，b. 任一稳定集合都不是任一个别的稳定集合的真子集。c. 如果核是一个稳定集合，那么它是惟一的稳定集合。

证明：a. 核的每一个元素都是一个分配，并且没有任何元素劣于分配，故从外部稳定性可得出结论；b. 从外部稳定性可知；c. 从(a)和(b)可知。□

◇例 279.3　(三人多数博弈)考虑博弈 $\langle \{1,2,3\}, v \rangle$，其中若 $|S| \geq 2$ 则 $v(S)=1$，否则 $v(S)=0$。该博弈的一个稳定集合是

$$Y = \{(1/2,1/2,0),(1/2,0,1/2),(0,1/2,1/2)\}.$$

其对应这样的"行为标准"，即某一对参与人平等分享惟一有效的支付单元。Y 的内部稳定性来自于对所有 Y 中的 x 和 y 仅有一个参与人宁愿要 x 而非 y 这一事实。为了检查外部稳定性，令 z 为 Y 之外的一个分配。那么有两个满足 $z_i < \frac{1}{2}$ 和 $z_j < \frac{1}{2}$ 的参与人 i 和 j。故存在 Y 中的一个分配，它是 $\{i,j\}$ 对 z 的一个异议。　280

对任一 $c \in [0, \frac{1}{2})$ 和任一 $i \in \{1,2,3\}$ 集合

$$Y_{i,c} = \{x \in X : x_i = c\}$$

也是博弈的一个稳定集合。其对应这样的"行为标准"，即参与人中的一个

被选出来并给予一固定支付。$Y_{i,c}$的内部稳定性来自于对集合中的任意x和y仅有一个参与人宁愿要x而非y这一事实。为了证明$Y_{i,c}$的外部稳定性,令$i=3$并令z为$Y_{3,c}$之外的一分配。若$z_3>c$那么$z_1+z_2<1-c$并且存在$x\in Y_{3,c}$使得$x_1>z_1$,和$x_2>z_2$,所以$x\succ_{\{1,2\}}z$。如果$z_3<c$和比如说是$z_1\leqslant z_2$那么$(1-c,0,c)\succ_{\{1,3\}}z$。

?练习 280.1 (简单博弈)令$\langle N,v\rangle$为一简单博弈(见练习 261.1)。令T为一最小胜利联盟(一个没有严格胜利子集合的胜利联盟),试证明将0赋给非T中的所有参与人的分配集合是一稳定集合。

?练习 280.2 (不可分商品市场)对于在例 260.1 中描述的满足$|B|\geqslant|L|$的市场,试证明集合。

$$Y=\{x\in X: x_i=x_j,若\ i,j\in L\ 或\ i,j\in B\},$$

是一稳定集合;并解释之。

?练习 280.3 (三人博弈)(Three-player games)对于一个三人博弈分配集合可用几何表示为一个高度为$v(N)$的等边三角形,在其中每个点代表了成分是到每个边距离的分配。(因此角对应了将$v(N)$赋给惟一一个参与人的三人分配。)试用这样一个图形去寻找下列三个博弈稳定集合的一般形式:$v(\{1,2\})=\beta<1$, $v(\{1,3\})=v(\{1,2,3\})=1$,否则$v(S)=0$。我们可将此博弈解释为这样一个市场,即参与人1是卖者,参与人2和3是分别具有保留价值β和1的买者。试按照这个市场的说法解释博弈的稳定集合。

?练习 280.4 参与人i是$\langle N,v\rangle$中的一虚拟参与人(dummy)如果对每个i不是其成员的联盟S有$v(S\cup\{i\})-v(S)=v(\{i\})$。试证明如果参与人$i$是$\langle N,v\rangle$中的一个虚拟参与人则他在任一稳定集合中的任一分配中的支付都是$v(\{i\})$。

?练习 280.5 令X为一任意(结果)集合并令D为X上的二元关系,其解释是若xDy那么x是某个联盟S对y的一异议。将稳定集合的定义推广如下。集合$Y\subseteq X$(X是结果集合)是稳定的如果它满足下列两条件。

281

内部稳定性 若$y\in Y$那么不存在$z\in Y$使得zDy。

外部稳定性 若$z\in X\setminus Y$则存在$y\in Y$使得yDz。

考虑一个有两种商品和两个代理人的交换经济(见第13.6节)。令 X 为满足对每个代理人 i 有 $x_i \succsim_i \omega_i$ 的所有分配 x 的集合。如果两个代理人都宁愿要 x 而非 y，则 $x\,D\,y$ 确定关系 D。试证明惟一的(推广了的)稳定集合是经济的核。

14.3 讨价还价集合、内核和核仁

我们现在讨论本章开始时所描述的第二种方法。该方法是，如果没有别的联盟有一"平衡"反异议，则我们认为一个联盟的异议是有说服力的；我们不要求异议或反异议它们本身在任何意义上是稳定的。我们研究三个在异议和反异议性质方面不同的解的概念。

14.3.1 讨价还价集合

令 x 为在可转移支付联盟博弈 $\langle N, v\rangle$ 中的一个分配。定义异议和反异议如下。

• 一个二元组 (y, S) 是 **i 针对 j 对 x 的异议**(objection of i against j to x)如果 S 包括 i 但不包括 j 并且对所有 $k \in S$ 有 $y_k > x_k$，这里 S 是一联盟并且 y 是一个 S—可行的支付向量。

• 一个二元组 (z, T) 是 **i 针对 j 的异议 (y, S) 的反异议**(counterobjection to the objection (y, S) of i against j)如果 T 包括 j 但不包括 i，对所有 $k \in T \setminus S$ 有 $z_k \geq x_k$，对所有 $k \in T \cap S$ 有 $z_k \geq y_k$。这里 T 是一个联盟并且 z 是一个 T—可行的支付向量。

这样一种异议是一个参与人反对另一个参与人的论点。一个参与人 i 针对 j 对 x 的异议详细说明了一个包括 i 但不包括 j 的联盟 S 和 $v(S)$ 的分割 y，对 S 的所有成员来说它都优于 x。j 对 (y, S) 的反异议详细说明了一个包含 j 但不包含 i 的可选择联盟 T 和 $v(T)$ 的分割，对 T 的所有也在 S 中的成员来说它至少与 y 一样好，并且对 T 的别的成员来说至少与 x 一样好。我们研究的解的概念定义如下。

▶定义 282.1 一个可转移支付联盟博弈的**讨价还价集合**(bargaining set)是所有具有下列性质的分配 x 的集合：对任一参与人 i，针对任一别的 282

参与人 j 对 x 的异议 (y, S) 总存在 j 对 (y, S) 的一个反异议。

讨价还价集合模化了一种社团里的稳定安排，在这种社团里任何参与人对某个分配 x 做的任一评价采取下列形式：在分配 x 中我若得到太少而 j 得到太多，则我能形成一个排除 j 的且每个人都比在 x 中更好的联盟。"如果参与人 j 的反应如下，那么只要涉及讨价还价集合则这种评价是无效的，你的需要是不正当的，我能形成一个排除你的联盟，其中每个人都至少与他们在 x 中一样好，同时加入到你的联盟中的参与人至少可获得与你提供给他们的一样多。"

像本节中别的解的概念一样，讨价还价集合假定了存在于没有反异议的异议之下的论点破坏了结果的稳定性。这个事实被认为是给定的，并且不派生于更多的关于参与人行为的初始假设。在一个特别情形中，解的近似因此依赖于这样的范围，即在那个情形中的参与人将一个没有反异议的异议存在作为改变结果的理由。

注意分配在核中当且仅当没有参与人有针对任一别的参与人的异议；因此核是讨价还价集合的一个子集。我们稍后证明（在推论 288.3 中）每个博弈的讨价还价集合是非空的。

◇例 282.2 （三人多数博弈）考虑三人多数博弈，该博弈的核是空的（见例 259.1）且博弈有很多稳定集合（见例 279.3）。博弈的讨价还价集合由下列论证可知是单元素集合 $\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$，令 x 为一分配并假定 (y, S) 是参与人 i 针对 j 对 x 的一个异议。那么我们一定有 $S = \{i, h\}$，这里 h 是第三个参与人并且 $y_h < 1 - x_i$（因为 $y_i > x_i$ 并且 $y(S) = v(S) = 1$）。为了使 j 对 (y, S) 有一反异议，我们需要 $y_h + x_j \leqslant 1$。因此为了使 x 在讨价还价集合中，我们要求对所有参与人 i, j 和 h 有：只要 $y_h \leqslant 1 - x_j$ 则 $y_h < 1 - x_i$，它蕴含了对所有 i 和 j 有 $1 - x_i \leqslant 1 - x_j$ 或 $x_j \leqslant x_i$，所以 $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$。显然这个分配在讨价还价集合中。

◇例 282.3 （叔叔和我）(My aunt and I) 令 $\langle\{1, 2, 3, 4\}, v\rangle$ 为一简单博弈（见练习 261.1），在其中 $v(S) = 1$ 当且仅当 S 包含了下列联盟中的某

283 一个：$\{2, 3, 4\}$ 或对 $i \in \{2, 3, 4\}$ 的 $\{1, i\}$（参与人 2 是"我"，参与人 1 是他的叔叔。）。在这个博弈中，参与人 1 似乎比别的参与人处在一个更强的位置，因为她仅需一个参与人的合作去形成一个胜利联盟。如果 x 是一个满足

$x_2<x_3$ 的分配,那么参与人 2 有一个针对参与人 3(通过 $\{1,2\}$)对 x 的异议,该异议无反异议。因此如果 x 在讨价还价集合中,那么可说 $x_2=x_3=x_4=\alpha$。参与人 1 针对参与人 2 对 x 的任一异议采取形式 $(y,\{1,j\})$,这里 $j=3$ 或 4 并且 $y_j<3\alpha$;没有反异议当且仅当 $\alpha+3\alpha+\alpha>1$ 或 $\alpha>\frac{1}{5}$。参与人 2 针对参与人 1 对 x 的一个异议必须使用联盟 $\{2,3,4\}$,且给参与人 3 或 4 中的某个少于 $(1-\alpha)/2$;参与人 1 没有异议当且仅当 $1-3\alpha+(1-\alpha)/2>1$ 或 $\alpha<\frac{1}{7}$。因此讨价还价集合是 $\{(1-3\alpha,\alpha,\alpha,\alpha):\frac{1}{7}\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{5}\}$。(注意反之则核是空的)。

我们看到(例 265.1)核中固有的竞争能使拥有过剩供给商品的参与人的支付降为零。下列练习给出了一个证明这种紧张竞争如何在讨价还价集合中被消弱的例子。

?练习 283.1 (一个市场)(A market)考虑由练习 265.2 中的可转移支付市场派生的联盟博弈。证明这个博弈的讨价还价集合是 $\{(\alpha,\alpha,\beta,\beta,\beta):0\leqslant\alpha\leqslant\frac{3}{2}$ 且 $2\alpha+3\beta=3\}$。试将这个集合与核相比较且给出一种解释。

14.3.2 内核

我们现在描述另一个解,像讨价还价集合一样,它是根据对每个异议都有一个反异议这一条件定义的;它与讨价还价集合的不同之处在于被认为有效的异议和反异议的性质。

令 x 为可转移支付联盟博弈 $\langle N,v\rangle$ 中的一个分配;对任一联盟 S 称 $e(S,x)=v(S)-x(S)$ 为 S 的**剩余**(excess)。如果联盟 S 的剩余是正的,则它度量了 S 为了分配 x 被实施而不得不放弃的数量;它是 S 为了维持社团稳定而作的牺牲。如果 S 的剩余是负的,则它的绝对值度量了当分配 x 被实施时 S 获得的超过了 S 值的数量;它是 S 在社会秩序中的剩余。

通过形成一个排除某个满足 $x_j>v(\{j\})$ 的参与人 j 的联盟和指出他不满于这个联盟的所失和所得,一参与人 i 反对分配 x。参与人 j 通过指出存在一个包含 j 而不包含 i 的联盟来持反异议并且牺牲更多(若 $e(S,x)>0$)或得到更少(若 $e(S,x)<0$)。更精确地,定义异议和反异议如下。 284

- **联盟 S 是参与人 i 针对参与人 j 对 x 的异议**(objection of i against j to x)如果 S 包含 i 但不包含 j 且 $x_j>v(\{j\})$。

• 联盟 T 是参与人 i 针对参与人 j 的异议 S 的反异议(counterobjection to the objection s of i against j)如果 T 包含 j 但不包含 i 且 $e(T,x) \geqslant e(S,x)$。

▶定义 284.1　可转移支付联盟博弈的内核(kernel)是所有满足下列性质的分配 x 的集合：对任一参与人 i 针对任一别的参与人 j 对 x 的每个异议 S 总有一个 j 对 S 的反异议。

对任何两个参与人 i 和 j 和任一分配 x 定义 $s_{ij}(x)$ 为任一包括 i 但不包括 j 的联盟 S 的最大剩余：

$$s_{ij}(x) = \max_{S \in C}\{e(S,x): i \in S \text{ 且 } j \in N \setminus S\}.$$

然后我们可选择定义内核为分配 $x \in X$ 的集合，使得对每一对参与人 (i, j) 要么 $s_{ji}(x) \geqslant s_{ij}(x)$ 要么 $x_j = v(\{j\})$。

内核模化了一种社团中的稳定安排，在这种社团中一个参与人对分配 x 有下列类型的论点："这是个我所属的但同时排除了 j 的联盟，它牺牲太多(或得到太少)。"如果参与人 j 能通过这样说来反应，则只要涉及内核，那么这样一种论点是无效的："你的要求是不正当的；我可指定一个我属于的但同时排除你的联盟，并且比你指定的联盟牺牲更多(或得到更少)。"

注意核和讨价还价集合的定义不要求我们去比较不同参与人的支付，而内核的定义则有此要求。因此前面概念的定义可容易地被扩展到一般联盟博弈 $\langle N, X, V, (\succsim_i)\rangle$ (见定义 268.2)。例如，如我们在第 13.5 节所见，核是所有 $x \in V(N)$ 的集合，对于它没有联盟 S 和满足对所有 $i \in S$ 有 $y \succ_i x$ 的 $y \in V(S)$。相反，内核的定义不能被这样扩展，它假定对于一个联盟的过剩比别的过剩大这一陈述是有意义的。因此内核仅在不同参与人的支付可被有意义地比较的情形中是一恰当的解的概念。

285　我们稍后证明内核是非空的(见推论 288.3)。它与讨价还价集合的关系如下。

■引理 285.1　可转移支付联盟博弈的内核是讨价还价集合的一个子集。

证明：令 $\langle N, v\rangle$ 为一可转移支付联盟博弈，令 x 为核中的一分配，且令 (y, S) 为参与人 i 针对 j 对 x 的在讨价还价集合意义下的一个异议：$i \in S$，

$j \in N \setminus S$，$y(S)=v(S)$，且对所有 $k \in S$ 有 $y_k > x_k$。如果 $x_j = v(\{j\})$ 那么满足 $z_j = v(\{j\})$ 的 $(z, \{j\})$ 是对 (y, S) 的一个反异议。如果 $x_j > v(\{j\})$，那么因为 x 在内核中所以我们有 $s_{ji}(x) \geqslant s_{ij}(x) \geqslant v(S) - x(S) = y(S) - x(S)$。令 T 为一个包括 j 但不包括 i 的联盟，对于它有 $s_{ji}(x) = v(T) - x(T)$。那么 $v(T) - x(T) \geqslant y(S) - x(S)$，所以 $v(T) \geqslant y(S \cap T) + y(S \setminus T) + x(T \setminus S) - x(S \setminus T) > y(S \cap T) + x(T \setminus S)$，因为 $y(S \setminus T) > x(S \setminus T)$。因此存在一个 T—可行的支付向量 z，它满足对所有 $k \in T \setminus S$ 有 $z_k \geqslant x_k$ 和对所有 $k \in T \cap S$ 有 $z_k \geqslant y_k$，所以 (z, T) 是对 (y, S) 的一个反异议。 □

◇例 285.2 （三人多数博弈）从我们对讨价还价集合的计算（例 282.2），前一个引理(285.1)和内核的非空性可知，三人多数博弈的内核是 $\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$。为直接说明之，假设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3$，且至少有一严格不等式成立。那么 $s_{31}(x) = 1 - x_2 - x_3 > 1 - x_2 - x_1 = s_{13}(x)$ 且 $x_1 > 0 = v(\{1\})$。所以 x 不在内核中。

◇例 285.3 （叔叔和我）由下列证明可知在例 282.3 中博弈的内核是 $\{(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})\}$。令 x 在内核中。由引理 285.1 及博弈的讨价还价集合的计算我们对某个 $\frac{1}{7} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{5}$，有 $x = (1-3\alpha, \alpha, \alpha, \alpha)$，所以 $s_{12}(x) = 2\alpha$ 且 $s_{21}(x) = 1 - 3\alpha$，因为 $1 - 3\alpha > 0$ 我们需要 $s_{12}(x) = 2\alpha \geqslant s_{21}(x) = 1 - 3\alpha$ 或 $\alpha \geqslant \frac{1}{5}$；因此 $\alpha = \frac{1}{5}$。

14.3.3 核仁

一个与内核紧密相关的解是核仁。令 x 为可转移支付联盟博弈中的分配。定义异议和反异议如下。

- 一个包含联盟 S 和分配 y 的二元组 (S, y) 是**一对 x 的异议**——如果 $e(S, x) > e(S, y)$（即 $y(S) > x(S)$）。

286

- 联盟 T 是**对异议 (S, y) 的反异议**（counterobjection to the objection (S, y)）——如果 $e(T, y) > e(T, x)$（即 $x(T) > y(T)$）且 $e(T, y) \geqslant e(S, x)$。

▶定义 286.1 可转移支付联盟博弈的**核仁**（nucleolus）是所有满足下

列性质的分配 x 的集合:对于每一个对 x 的异议(S,y),都存在一个对(S,y)的反异议。

像对内核一样,其思想为 S 的剩余是 S 不满意 x 的一个度量:它是 S 忍受 x 而不从 N 逃离所支付的价格。在内核定义中异议是由惟一的参与人作出的,而在这里异议由联盟作出。一个异议(S,y)可被解释为 S 的下列形式的陈述"在 x 中我们的过剩太大;我们提出一个在其中过剩较小的可选择分配 y"。只有当没有联盟 T 能通过这样说来反应,核仁才模化了这样的异议导致结果不稳定的情形。"你们的要求是不正当的,因为我们在 y 下的过剩大于在 x 下的过剩并且你们在 y 下的过剩超过了在 x 下的过剩"。换言之,根据核仁的概念,对某个联盟 S 而言,如果不增加某个联盟的过剩到一个至少与 S 的初始过剩一样大的水平而 S 的过剩能被减少,那么一个分配不是稳定的。

这个核仁的定义不是标准的,但它提供了内核与讨价还价集合的比较,并且比标准定义更容易解释,我们现在证明它们是等价的。

对任一分配 x,令 $S_1,\cdots,S_{2^{|N|}-1}$为对 $\ell=1,\cdots,2^{|N|}-2$ 满足 $e(S_\ell,x)\geqslant e(S_{\ell+1},x)$的联盟的一个排列,并令 $E(x)$为由对所有 $\ell=1,\cdots,2^{|N|}-1$,有 $E_\ell(x)=e(S_\ell,x)$所定义的过剩的向量。令 $B_1(x),\cdots,B_K(x)$为所有这种联盟集合的分割:S 和 S' 在同一单元当且仅当 $e(S,x)=e(S',x)$。对后一 $S\in B_k(x)$令 $e(S,x)=e_k(x)$,所以 $e_1(x)>e_2(x)>\cdots>e_K(x)$。

我们说 $E(x)$是字典式地小于 $E(y)$如果对满足 $E_\ell(x)\neq E_\ell(y)$的最小 ℓ 有 $E_\ell(x)<E_\ell(y)$,或等价地如果存在 k^* 使得对所有 $k<k^*$ 我们有 $|B_k(x)|=|B_k(y)|$和 $e_k(x)=e_k(y)$,且或者(ⅰ)$e_{k^*}(x)<e_{k^*}(y)$或者(ⅱ)$e_{k^*}(x)=e_{k^*}(y)$和$|B_{k^*}(x)|<|B_{k^*}(y)|$。

■引理 286.2 一个可转移支付联盟博弈的核仁是满足向量 $E(x)$为字典式最小分配 x 的集合。

287 证明:令$\langle N,v\rangle$是一可转移支付联盟博弈,且令 x 是一满足$E(x)$为字典式最小分配。为了证明 x 在核中,假定(S,y)是对 x 的一个异议,所以 $e(S,y)<e(S,x)$。令 k^* 为使得对所有 $k<k^*$ 有 $e_k(x)=e_k(y)$和 $B_k(x)=B_k(y)$(不恰是$|B_k(x)|=|B_k(y)|$)的最大 k 值。因为 $E(y)$不是字典式地小于 $E(x)$,所以我们有要么(ⅰ)$e_{k^*}(y)>e_{k^*}(x)$;要么(ⅱ)$e_{k^*}(x)=e_{k^*}(y)$和$|B_{k^*}(x)|\leqslant|B_{k^*}(y)|$。在任一情形中存在一个满足 $e_{k^*}(y)=e(T,y)>e(T,x)$的联盟 $T\in B_{k^*}(y)$。我们现在证明 $e(T,y)\geqslant e(S,$

x)，所以 T 是对(S,y)的反异议。因为 $e(S,y)<e(S,x)$所以我们有 $S\notin \cup_{k=1}^{k^*-1}B_k(x)$且因此有 $e_{k^*}(x)\geq e(S,x)$；因为 $e_{k^*}(y)\geq e_{k^*}(x)$所以我们有 $e(T,y)\geq e(S,x)$。

现在假设 x 在核仁中并且$E(y)$是字典式地小于 $E(x)$。令 k^* 为满足下列各式的最小 k 值：对所有 $k<k^*$ 有 $B_k(x)=B_k(y)$并且要么(ⅰ)$e_{k^*}(y)<e_{k^*}(x)$，要么(ⅱ)$e_{k^*}(y)=e_{k^*}(x)$和 $B_{k^*}(y)\neq B_{k^*}(x)$(因此$|B_{k^*}(y)|\neq|B_{k^*}(x)|$)。在两个情形中都存在一个满足 $e(S,y)<e(S,x)$的联盟 $S\in B_{k^*}(x)$。令 $\lambda\in(0,1)$且令 $z(\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$；对任一联盟 R 我们有 $e(R,z(\lambda))=\lambda e(R,x)+(1-\lambda)e(R,y)$。我们说二元组$(S,z(\lambda))$是对 x 的没有反异议的一个异议。因为 $e(S,z(\lambda))<e(S,x)$所以它是一异议。为了使 T 成为一个反异议，我们需要 $e(T,z(\lambda))>e(T,x)$和 $e(T,z(\lambda))\geq e(S,x)$。不过，如果 $e(T,z(\lambda))>e(T,x)$则 $e(T,y)>e(T,x)$，它蕴含了 $T\notin \cup_{k=1}^{k^*}B_k(x)$且因此 $e(S,x)>e(T,x)$。同样，因为 $T\notin \cup_{k=1}^{k^*-1}B_k(y)$所以我们有 $e(S,x)=e_{k^*}(x)\geq e_{k^*}(y)\geq e(T,y)$。因此 $e(S,x)>e(T,z(\lambda))$。我们可下结论，没有对$(S,z(\lambda))$的反异议。 □

核仁与内核的关系如下。

■引理287.1　一个可转移支付联盟博弈的核仁是内核的一子集。

证明：令$\langle N,v\rangle$为一可转移支付联盟博弈，且令 x 为一不在$\langle N,v\rangle$内核中的分配。我们证明 x 不在$\langle N,v\rangle$的核仁中。因为 x 不在内核中，所以存在满足 $s_{ij}(x)>s_{ji}(x)$和 $x_j>v(\{j\})$的参与人 i 和 j。因为 $x_j>v(\{j\})$，所以存在$\epsilon>0$使得 $y=x+\epsilon 1_{\{i\}}-\epsilon 1_{\{j\}}$是一分配(这里 $1_{\{k\}}$是第 k 个单位向量)；选择ϵ足够小，使得 $s_{ij}(y)>s_{ji}(x)$。注意 $e(S,x)<e(S,y)$当且仅当 S 包含 i 但不包含 j 和 $e(S,x)>e(S,y)$当且仅当 S 包含 j 但不包含 i。令 k^* 为使得存在一个满足 $e(S,x)\neq e(S,y)$的联盟 $S\in B_{k^*}(x)$的 k 的最小值。因为 $s_{ij}(x)>s_{ji}(x)$所以集合 $B_{k^*}(x)$包含至少一个含有 i 但不含有 j 的联盟，并且不包含只含有 j 但不含有 i 的联盟。进一步说，对所有 $k<k^*$，我们有 $B_k(y)=B_k(x)$和 $e_k(y)=e_k(x)$。现在如果 $B_{k^*}(x)$包含既含有 i 又含有 j 的联盟或包含不含有两者的联盟，那么 $e_{k^*}(y)=e_{k^*}(x)$且 $B_{k^*}(y)$是 $B_{k^*}(x)$的一严格子集。若不是，那么因为 $s_{ij}(y)>s_{ji}(y)$所以我们有 $e_{k^*}(y)<e_{k^*}(x)$。在两种情形中 $E(y)$都是字典式地少于 $E(x)$且因此 x 不在$\langle N,v\rangle$的核仁中。 □

288

我们现在证明任一博弈的核仁是非空的。

■命题 288.1　任一可转移支付联盟博弈的核仁是非空的。

证明：首先我们证明对 k 的每个值，函数 E_k 是连续的。这由下列事实得到，对任一 k 我们有：

$$E_k(x)=\min_{T\in C^{k-1}}\max_{S\in C\setminus T}e(S,x),\tag{288.2}$$

这里是 $C_0=\{\phi\}$，对 $k\geqslant 1$，C^k 是所有 k 个联盟族的集合。因为 E_1 是连续的，所以集合 $X_1=\arg\min_{x\in X}E_1(x)$ 是非空的和紧的。现在，对每个整数 $k\geqslant 1$ 定义 $X_{k+1}=\arg\min_{x\in X_k}E_{k+1}(x)$。通过归纳每个这种集合是非空的和紧的；因为 $X_{2^{|N|}-1}$ 是核仁所以证明完成。 □

由这个结论立即可知任一博弈的讨价还价集合和内核是非空的。

■推论 288.3　任一可转移支付联盟博弈的讨价还价集合和内核都是非空的。

证明：这可由核仁的非空性（命题 288.1）和核仁是内核的子集（引理 287.1）及内核是讨价还价集合的子集（引理 285.1）这一事实得到。 □

正如我们上面所述，一个博弈的讨价还价集合可能包含很多分配；内核也是这样。不过，如下列结论表明，核仁经常是一个单元素集。

■命题 288.4　任何可转移支付联盟博弈的核仁是一个单元素集。

证明：令 $\langle N,v\rangle$ 是一可转移支付联盟博弈。假定分配 x 和 y 都在核仁中，所以 $E(x)=E(y)$。我们要证明对任一联盟 S，我们有 $e(S,x)=e(S,y)$ 并且因此特别地对任一参与人 i 我们有 $e(\{i\},x)=e(\{i\},y)$，所以 289 $x=y$。假设至少有一联盟 S^* 满足 $e(S^*,x)\neq e(S^*,y)$ 并考虑分配 $z=\frac{1}{2}(x+y)$。因为对所有 k 有 $E_k(x)=E_k(y)$，所以我们对所有 k 有 $e_k(x)=e_k(y)$ 和 $|B_k(x)|=|B_k(y)|$。但因为 $e(S^*,x)\neq e(S^*,y)$ 所以存在 k 的一个最小值 k^*，使得 $B_{k^*}(x)\neq B_{k^*}(y)$。现在，若 $B_{k^*}(x)\cap B_{k^*}(y)$ 是非空的，则 $B_{k^*}(z)=B_{k^*}(x)\cap B_{k^*}(y)\subset B_{k^*}(x)$；如果 $B_{k^*}(x)\cap B_{k^*}(y)$ 是空的，则 $e_{k^*}(z)<e_{k^*}(x)=e_{k^*}(y)$。在每个情形中 $E(z)$ 都是字典式地小于 $E(x)$，这与 x 在核仁中这一事实相矛盾。 □

?练习 289.1　（产品经济）试证明练习 259.3 博弈的核仁中的惟一分配是给每个工人 $\frac{1}{2}[f(w)-f(w-1)]$，这里该博弈模化了一个有一个资

本家和 w 个工人的产品经济。(注意因为核仁是一单元素集所以仅需要证明分配在核仁中。)

?练习 289.2 (加权多数博弈)**一个加权多数博弈**(A weighted majority game)是一简单博弈$\langle N, v\rangle$,在其中对某个 $q\in\mathbb{R}$ 和 $w\in\mathbb{R}_+^N$ 有

$$v(S)=\begin{cases}1 & 若\ w(S)\geq q\\ 0 & 其他\end{cases}$$

这里对任一联盟 S 有 $w(S)=\sum_{i\in S}w_i$。一种解释是:w_i 是参与人 i 有的票数,q 是获胜需要的票数(定额)。一个加权多数博弈是**齐次的**(homogeneous)如果对任何最小胜利联盟 S 有 $w(S)=q$,它是**零和的**(zerosum)如果对每个联盟 S 要么 $v(S)=1$ 要么 $v(N\setminus S)=1$,但两者不能同时成立。考虑一个零和齐次加权多数博弈$\langle N, V\rangle$,其中对每个不属于任何最小胜利联盟的参与人 i 满足 $W_i=0$。试证明$\langle N, V\rangle$的核包括对所有 $i\in N$ 满足 $x_i=w_i/w(N)$的分配 x。

14.4 夏普里值

本章中我们研究的最后一个解的概念是夏普里值。沿用前一部分的方法,我们先用异议与反异议来描述这个解。然后我们转向标准的(公理的)描述。

14.4.1 异议与反异议的定义

至今我们研究的联盟博弈解的概念在定义时仅涉及到分离的单个博弈。而一个给定博弈的夏普里值被定义时,则涉及到别的博弈,下列是一个值(value)的例子——一个对每个可转移支付联盟博弈赋惟一一个可行支付组合的函数,一个支付组合是可行的如果它的成分和是 $v(N)$。(由值所赋的支付组合是可行的这一要求有时被称为**效率**(efficiency)。 290

我们对夏普里值的第一个表示,是用一定类型的异议和反异议,就像对在以前部分所研究的解的表示一样。为了定义这些异议和反异议,令$\langle N, v\rangle$为一可转移支付联盟博弈并对每个联盟 S 定义$\langle N, v\rangle$的子博弈$\langle S, v^S\rangle$

为满足对任一 $T\subseteq S$ 有 $v^S(T)=v(T)$ 的可转移支付联盟博弈。令 ψ 为一值。参与人 i 针对参与人 j 对 $v(N)$ 的一个分配 x 的异议可采用下列两种形式中的一种。

- "多给我一些，否则的话我会离开博弈，使你仅得到 $\psi_j(N\setminus\{i\}, v^{N\setminus\{i\}})$ 而不是更大的支付 x_j，所以你会失去正数量 $x_j-\psi_j(N\setminus\{i\}, v^{N\setminus\{i\}})$"。
- "多给我一些，否则的话我会劝说别的参与人将你从博弈中排除，使我得到 $\psi_i(N\setminus\{j\}, v^{N\setminus\{j\}})$，而不是较小的支付 x_i，所以我会得到正数量 $\psi_i(N\setminus\{j\}, v^{N\setminus\{j\}})-x_i$"。
- 参与人 j 对第一类异议的反异议是这一主张，"诚然你离开我会有所失，但如果我离开那你将至少失去 $x_i-\psi_i(N\setminus\{j\}, v^{N\{j\}})\geqslant x_j-\psi_j(N\setminus\{i\}, v^{N\setminus\{i\}})$。"
- 参与人 j 对第二类异议的反异议是这一主张。"诚然若你排除我你会有所得，但如果我排除你那么我至少会得到一样多：$\psi_j(N\setminus\{i\}, v^{N\setminus\{i\}})-x_j\geqslant\psi_i(N\setminus\{j\}, v^{N\setminus\{j\}})-x_i$"。

夏普里值被要求满足下列性质：对任一参与人 i，针对任一别的参与人 j 的每个异议都存在参与人 j 的一个反异议。

这些异议和反异议不同于这些用作定义讨价还价集合、内核和核仁的概念之处在于，它们涉及到了较小博弈的结果。这些结果被假设为派生于同博弈支付本身一样的逻辑，即像博弈的结果本身一样，较小博弈的结果由值给定，在此方面一值的定义与稳定集合的定义有相同的特征。

要求值对每个博弈赋一个满足每个异议由一反异议平衡的支付组合，这等价于下列条件。

▶定义 291.1　一值 ψ 满足**平衡贡献性质**(balanced contributions property)如果对每个可转移支付联盟博弈 $\langle N, v\rangle$ 我们有：只要 $i\in N$ 和 $j\in N$ 则

$$\psi_i(N,v)-\psi_i(N\setminus\{j\}, v^{N\setminus\{j\}})=\psi_j(N,v)-\psi_j(N\setminus\{i\}, v^{N\setminus\{i\}})$$

我们现在证明满足这个性质的惟一值是夏普里值，定义如下。先定义在博弈 $\langle N, v\rangle$ 中满足 $i\notin S$ 的参与人 i 对任一联盟的**边际贡献**(marginal contribution)为

$$\Delta_i(S)=v(S\cup\{i\})-v(S).$$

▶定义 291.2 **夏普里值** ψ(Shapley value)由下列条件定义

$$对每个\ i\in N\ 有\ \varphi_i(N,v)=\frac{1}{|N|!}\sum_{R\in\mathcal{R}}\Delta_i(S_i(R)),$$

这里$\mathcal{R}$是 N 的所有$|N|!$ 个排列的集合且 $S_i(R)$是在排列 R 中先于i 的参与人的集合。

我们可对夏普里值作如下解释:假设所有参与人按某个顺序排列,所有排列都是等可能的。那么 $\varphi_i(N,v)$是关于参与人 i 的所有排列对在他之前的参与人集合的期望边际贡献。注意在任一排列中所有参与人边际贡献之和是 $v(N)$,所以夏普里值确实是一个值。

■命题 291.3 满足平衡贡献性质的惟一值是夏普里值。

证明:首先我们证明至多有一个满足该性质的值。令 ψ 和ψ'为任意两个满足条件的值。我们可通过对参与人数目的归纳来证明 ψ 和 ψ'是同一的。假设它们对少于 n 个参与人的所有博弈是一样的,且令$\langle N,v\rangle$为一个有 n 个参与人的博弈。因为对任一 $i,j\in N$,有 $\psi_i(N\setminus\{j\},v^{N\setminus\{j\}})=\psi_i'(N\setminus\{j\},v^{N\setminus\{j\}})$,我们从平衡贡献性质可推断,对所有 $i,j\in N$ 有 $\psi_i(N,v)-\psi_i'(N,v)=\psi_j'(N,v)-\psi_j'(N,v)$。现在固定 i 并对$j\in N$ 加总,同时利用$\sum_{j\in N}\psi_j(N,v)=\sum_{j\in N}\psi_j'(N,v)=v(N)$这一事实,我们可得结论:对所有 $i\in N$ 有 $\psi_i(N,v)=\psi_i'(N,v)$。 292

我们现在证明夏普里值 φ 满足平衡贡献性质。固定一个博弈$\langle N,v\rangle$。我们证明对所有 $i,j\in N$ 有 $\varphi_i(N,v)-\varphi_j(N,v)=\varphi_i(N\setminus\{j\},v^{N\setminus\{j\}})-\varphi_j(N\setminus\{i\},v^{N\setminus\{i\}})$。这个等式的左边是

$$\sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}\alpha_S[\Delta_i(S)-\Delta_j(S)]+\beta_S[\Delta_i(S\cup\{j\})-\Delta_j(S\cup\{i\})],$$

这里 $\alpha_S=|S|!\ (|N|-|S|-1)!\ /|N|!$ 且 $\beta_S=(|S|+1)!\ (|N|-|S|-2)!\ /|N|!$,而右边是

$$\sum_{S\subseteq N\setminus\{i,j\}}\gamma_S[\Delta_i(S)-\Delta_j(S)],$$

这里 $\gamma_S=|S|!\ (|N|-|S|-2)!\ /(|N|-1)!$。结论由下列事实得到:

$$\Delta_i(S)-\Delta_j(S)=\Delta_i(S\cup\{j\})-\Delta_j(S\cup\{i\})\text{和 }\alpha_S+\beta_S=\gamma_S。\quad\square$$

注意平衡贡献性质仅将一个博弈与它的子博弈联系起来。因此在一个博弈$\langle N,v\rangle$的夏普里值推导中,我们可将注意力限于$\langle N,v\rangle$的子博弈,而不是对所有可能博弈的集合工作。

14.4.2 公理性描述

我们现在讨论夏普里值的一个公理性描述。不像在前面部分中,这里的推导仅将注意力限于给定了参与人集合的博弈集合。从始至终我们固定这个集合为 N,且简单地用它的值函数 v 表示一个博弈。

为了叙述公理我们需要下列定义。参与人 i 在 v 中是一**虚拟参与人**(dummy)如果对每一个排除了 i 的联盟 S 有 $\Delta_i(S)=v(\{i\})$。参与人 i 和 j 在 v 中是**可互换的**(interchangeable)如果对每个既不包含 i 又不包含 j 的联盟 S 有 $\Delta_i(S)=\Delta_j(S)$(或,等价地,对每个包括 i 但不包括 j 的联盟 S 有 $v((S\setminus\{i\})\cup\{j\})=v(S)$):公理如下:

SYM(对称性)如果在 v 中 i 和 j 是可互换的那么

$$\psi_i(v)=\psi_j(v).$$

DUM(虚拟参与人)如果在 v 中 i 是一虚拟参与人那么

$$\psi_i(v)=v(\{i\}).$$

ADD(可加性)对任何两博弈 v 和 w 我们有:对所有 $i\in N$ 有

$\psi_i(v+w)=\psi_i(v)+\psi_i(w)$. 这里 $v+w$ 是由对每个联盟 S 有 $(v+w)(S)=v(S)+w(S)$ 所确定的博弈。

293 注意前两个公理对单个博弈施加条件,而后一个公理联系了不同博弈的结果。这个最后公理在数学上是很便利的,但难于理解其成因:$v+w$ 的结构可能导致与由 v 或 w 分别导致的行动不相关的行动。Luce 和 Raiffa (1957), p.248)写到这个公理"给我们留下的印象是一个在值概念中的缺陷";对于较不消极的观点参看 Myerson (1991, pp.437—438)。

■**命题 293.1** 夏普里值是惟一的满足 SYM, DUM 和 ADD 的值。

证明:我们先证明夏普里值满足这些公理。

SYM:假定 i 和 j 是可互换的。对每个排列 $R\in\mathcal{R}$ 令 $R'\in\mathcal{R}$,其不同于 R 之处仅在于 i 和 j 的位置被互换了。如果在 R 中 i 先于 j 那么我们有 $\Delta_i(S_i(R))=\Delta_j(S_j(R'))$。如果 j 先于 i 那么 $\Delta_i(S_i(R))-\Delta_j(S_j(R'))=v(S\cup\{i\})-v(S\cup\{j\})$,这里 $S=S_i(R)\setminus\{j\}$。因为 i 和 j 是可互换的,所以我们有 $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$。故在此情形中也有 $\Delta_i(S_i(R))=\Delta_j(S_j(R'))$。从而 φ 满足 SYM。

DUM:显然 φ 满足这个条件。

ADD：由下列事实可知：若 $u=v+w$ 则

$$u(S\cup\{i\})-u(S)=v(S\cup\{i\})-v(S)+w(S\cup\{i\})-w(S).$$

我们现在证明夏普里值是惟一满足这些公理的值。令 ψ 为满足这些公理的值。对任一联盟 T 定义博弈 v_T 如下

$$v_T(S)=\begin{cases}1 & 若\ S\supseteq T\\ 0 & 否则。\end{cases}$$

将一个博弈 v 视为一个有 $2^{|N|}-1$ 个 $(v(S))_{S\in C}$ 的族。我们先证明对任一博弈 v 存在惟一的实数族 $(\alpha_T)_{T\in C}$ 使得 $v=\sum_{T\in C}\alpha_T v_T$，即，我们证明 $(v_T)_{T\in C}$ 是博弈空间的一代数基。因为博弈族 $(v_T)_{T\in C}$ 包含 $2^{|N|}-1$ 个元素，所以可充分证明这些博弈是线性独立的假设 $\sum_{S\in C}\ \beta_S v_S=0$；我们需要证明对所有 S 有 $\beta_S=0$。假设与之相反存在某个满足 $\beta_T\neq 0$ 的联盟 T。那么我们可选择这样一个联盟 T 对于它有：对所有 $S\subset T$，$\beta_S=0$，在此情形中 $\sum_{S\in C}\ \beta_S v_S(T)=\beta_T\neq 0$，这是个矛盾。

现在，由 SYM 和 DUM 任一博弈 $\alpha v_T(\alpha\geq 0)$ 的值由下式惟一地给定：若 $i\in T$ 则 $\psi_i(\alpha v_T)=\alpha/|T|$，否则 $\psi_i(\alpha v_T)=0$。注意若 $v=\sum_{T\in C}\ \alpha_T v_T$ 则我们有 $v=\sum_{\{T\in C\,:\,\alpha_T>0\}}\alpha_T v_T-\sum_{\{T\in C\,:\,\alpha_T<0\}}(-\alpha_T v_T)$，所以由 ADD 可知 v 的值被惟一确定，从而完成了证明。 294

◇例 294.1 （*加权多数博弈*）考虑具有权数 $w=(1,1,1,2)$ 和定额 $q=3$ 的加权多数博弈 v（见练习 289.2）。在其中参与人 4 处于首位或末位的排列中他的边际贡献是 0；在所有其他排列中他的边际贡献是 1。因此 $\varphi(v)=(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2})$。注意我们有 $v=v_{\{1,4\}}+v_{\{2,4\}}+v_{\{3,4\}}+v_{\{1,2,3\}}-v_{\{1,2,4\}}-v_{\{1,3,4\}}-v_{\{2,3,4\}}$，从它我们又可推断 $\varphi_4(v)=3\cdot\frac{1}{2}+0-3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$。

?练习 294.2 试证明下列结论，它指出了若三个公理 SYM、DUM 和 ADD 中的任一个被去掉则存在一个不同于夏普里值的且满足剩下两个公理的值。

a. 对任一博弈 v 和任一 $i\in N$，令 $\psi_i(v)$ 为参与人 i 关于 N 的 $(|N|-1)!$ 个参与人 1 在首位的排列的平均边际贡献。那么 ψ 满足 DUM 和 ADD 但不满足 SYM。

b. 对任一博弈 v 令 $\psi_i(v)=v(N)/|N|$。那么 ψ 满足 SYM 和 ADD 但不满足 DUM。

c. 对任一博弈 v 令 $D(v)$ 为在 v 中虚拟参与人的集合且令

$$\psi_i(v)=\begin{cases}\frac{1}{|N\setminus D(v)|}(v(N)-\sum_{j\in D(v)}v(\{j\})) & 若\ i\in N\setminus D(v)\\ v(\{i\}) & 若\ i\in D(v).\end{cases}$$

那么 ψ 满足 SYM 和 DUM 但不满足 ADD。

◇例 294.3　考虑博弈 $\langle\{1,2,3\},v\rangle$，其中 $v(1,2,3)=v(1,2)=v(1,3)=1$，在其它情况下 $v(S)=0$。(这个博弈可被解释为一个市场模型，在其中有一个卖者(参与人 1)和两个潜在买者(参与人 2 和 3)。参与人 1 拥有一单位她没估值的商品，参与人 2 和 3 都将该商品估值为一单位支付。)有六种可能的参与人的排列。在四种参与人 1 位于 2 或 3 的排列中，她的边际贡献是 1 且其他两个参与人的边际贡献是 0，在排列(1,2,3)中参与人 2 的边际贡献是 1，在(1,3,2)中参与人 3 的边际贡献是 1。因此博弈的夏普里值为$(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6})$。相反，博弈的核包含惟一支付组合(1,0,0)。

◇例 294.4　(一个市场)考虑例 260.1 中不可分商品的市场，在其中有 b 个买主和 l 个卖主，且 $l<b$。考虑市场的复制，在其中对某个正整数 k 有 kb 个买主和 kl 个卖主，如果 k 很大，那么在参与人的大部分随机排列中，在先于任一给定参与人 i 的参与人集合中买者的比例会靠近 $b/l>1$。若这一种排列中如果参与人 i 是一卖者则她的边际贡献是 1，所以一个卖者的夏普里值支付接近于 1(买者的接近于 0)。精确地，可以证明随 $k\to\infty$ 一个卖者的夏普里值支付的极限是 1。这是一个归于 Aumann(1975)的更一般结论的最简单例子：随着市场规模的增加，夏普里值收敛到竞争支付的组合。

?练习 295.1　试找出博弈 $\langle\{1,2,3,4\},v\rangle$ 的核和夏普里值，在此博弈中：$v(\{1,2,3,4\})=3$，若 S 包括$\{1,2,3\}$中至多一个参与人则 $v(S)=0$，其它情况下 $v(S)=2$。试解释两个概念不同的根源。

?练习 295.2　(产品经济)试找出练习 259.3 中博弈的夏普里值并将其与核和核仁(见练习 289.1)作比较。

◇例 295.3　(多数博弈)考虑这样一个国会：其中一个政党有 $m-1$ 个议席，其他 m 个政党各有一个议席，且多数拥有决定权(这是《叔叔和我》的推

广）。这个情形可被模化为一个加权多数博弈（见练习 289.2），其中：$N=\{1, \cdots, m+1\}$，$w_1=m-1$，对于 $i\neq 1$ 有 $w_i=1$，且 $q=m$，大政党的边际贡献在除了 $2\,m!$ 个它位于首位或末位的所有排序中都是 1。因此博弈的夏普里值赋给大政党的支付是 $[(m+1)!\ -2m!]/(m+1)!\ =(m-1)/(m+1)$。

?练习 295.4　考虑有几个政党的国会，它们中的两个各有全部议席的 $\frac{1}{3}$，其它 $n-2$ 个政党平等分享剩下的议席。试将这个情形模化为一个加权多数博弈（参看练习 289.2）。

a. 试证明当 $n\rightarrow\infty$ 时每个大政党的夏普里值支付的极限是 $\frac{1}{4}$。

b. 根据夏普里值，对于 $n-2$ 个小政党来说形成惟一一个联合党是否可取？

?练习 295.5　试证明在一个凸博弈中（见练习 260.4）夏普里值是核的一个元素。

下列练习中的结论提供了一个关于夏普里值的解释；它是对上面已讨论的补充。

?练习 296.1　考虑第 7 章中所研究的轮流出价讨价还价博弈的下列变形。令 $\langle N, v\rangle$ 为一可转移支付联盟博弈，在其中 $v(S)\geq 0$ 并且对每个联盟 S 和参与人 $i\in N\setminus S$ 有 $v(S\cup\{i\})\geq v(S)+v(\{i\})$。在每个时期存在一个积极参与人（active players）集合 $S\subseteq N$，开始是 N，其中一个比如说是 i 被随机选出去提出一个 S—可行支付向量 $x^{S,i}$。那么剩下的某个固定排列中的每个活动参与人要么接受要么拒绝 $x^{S,i}$。如果每个活动参与人接受 $x^{S,i}$，那么博弈结束并且每个参与人 $j\in S$ 接受支付 $x_j^{S,i}$；如果至少有一活动参与人拒绝 $x^{S,i}$，则我们移向下一时期，其中以概率 $\rho\in(0,1)$ 活动参与人集合保留在 S 并且以概率 $1-\rho$ 活动参与人集合变为 $S\setminus\{i\}$（即，参与人 i 从博弈中被逐出），同时参与人 i 接收支付 $v(\{i\})$，参与人并不对将来贴现。 296

假设有一个 S—可行支付向量族 $(x^{S,i})_{S\in C,i\in S}$ 使得对所有 S，所有 $i\in S$ 和所有 $j\in S\setminus\{i\}$ 有 $x_j^{S,i}=\rho\bar{x}_j^S+(1-\rho)\bar{x}_j^{S\setminus\{i\}}$，这里对所有 S 有 $\bar{x}^S=\sum_{i\in S}x^{S,i}/|S|$。试证明该博弈有一子博弈精炼均衡，在其中只要行动参与人的集合是 S，则每个参与人 $i\in S$ 提出 $x^{S,i}$。进一步证明有这样一

个族使得对每个 $S\in C$ 有 $\bar{x}^S=\varphi(S,v)$，因此证明了博弈有一个每个参与人 i 的期望支付是他的夏普里值支付 $\varphi_i(N,v)$ 的子博弈精炼均衡。注意在此情形中若 ρ 靠近 1 则每个出价 $x^{S,i}$ 靠近博弈 $\langle S,v\rangle$ 的夏普里值。(Hart 和 Mas-Colell(1996)证明了每个参与人的战略独立于历史的每个子博弈精炼均衡都有这个性质；Krishna 和 Serrano (1995)研究了非静态均衡。)

14.4.3 成本分摊(Cost-Sharing)

令 N 为一个参与人集合，并对每个联盟 S，有 $C(S)$ 为 S 的成员提供某种服务的成本。$C(N)$ 该如何在参与人间进行分摊？一个可能的答案由博弈 $\langle N,C\rangle$ 的夏普里值 $\varphi(C)$ 给出，这里 $\varphi_i(C)$ 是参与人 i 所要求的支付。这种成本分摊的办法由上面提供的公理支持，它在当前背景下的解释如下。可行性要求 $\sum_{i\in N}\varphi_i(C)=C(N)$ 是说参与人所需的全部支付应等于 $C(N)$，这是提供服务的全部成本。公理 DUM 和 SYM 当应用于博弈时，有作为“公平”原理的解释。DUM 说一个提供服务的边际成本是，相同的参与人无论哪一组现在正接受服务都应该支付那个成本。SYM 说两个边际成本是相同的，参与人无论哪一组现在正接受服务都应该支付一样多。ADD 在这里比在战略相互作用背景下更有趣。它说任一参与人对两种不同服务的支付应该是分别对两种服务支付的和。

297

[注解]

稳定集合先由 Von Neumann 和 Morgenstern (1944)研究。讨价还价集合的思想应归于 Aumann 和 Maschler (1964)，我们所给的系统表达是 Davis 和 Maschler (1963)中的。内核和核仁分别应归于 Davis 和 Maschler (1965) 和 Schmeidler(1969)，讨价还价集合非空性证明首先由 Davis。Maschler 和 Peleg 给出(参看 Davis 和 Maschler(1963, 1967)和 Peleg(1963b, 1967))。我们用异议和反异议对核仁的定义似乎是新的。在第 14.3.3 节的结论(除引理 286.2)应归于 Schmeidler (1969)。夏普里值应归于 Shapley(1953)，他证明了命题 293.1。平衡贡献性质(定义 291.1)。应归于 Myerson (1977, 1980)；也可参看 Hart 和 Mas-Colell(1989)。

夏普里值应用于成本分摊问题是由 Shubik(1962)提出的。该理论已由很多作者发展，包括 Roth 和 Verrecchia(1979)，Billera，Heath，and Raanan(1978)。

例 282.3 和 285.3 由 Davis 和 Maschler (1965，Section 6)。练习 283.1 中的结论应归于 Maschler (1976)。练习 289.1 取于 Moulin(1988，pp. 126—127)；也可参看练习 5.3)。加权多数博弈首先由 von Neumann 和 Morgenstern (1944)研究；练习 289.2 中的结论应归于 Peleg(1968)；练习 295.1 中的博弈应归于 Zamir，在 Aumann (1986，p. 986)中引用。练习 295.2 取于 Moulin (1988，p. 111)。练习 295.4 中的结论应归于 Milnor 和 Shapley (1978)，在练习 295.5 中的结论应归于 Shapley (1971/72)，在练习 296.1 中的结论应归于 Hart 和 Mas-Colell(1996)。

本章中的很多材料来自于 Aumann(1989)的讲课笔记，尽管我们关于解的概念的一些解释与他的不同。

稳定集合与讨价还价集合的定义可直接拓展到无可转移支付联盟博弈 298 (例可参看 Aumann 和 Peleg (1960)和 Peleg(1963a))，至于夏普里值对这些博弈的拓展可参看 Harsanyi(1963)，Shapley(1969)，Aumann(1985a)，Hart (1985)及 Maschler 和 Owen(1989，1992)。

Harsanyi(1974)研究了一类子博弈精炼均衡对应于稳定集合的一种扩展博弈。Harsanyi(1981)，Gul(1989)和 Hart 和 Mas-Colell(1996)研究了具有对应于夏普里值的均衡的扩展博弈。

本章中我们研究的解的概念可被解释为使“公平”概念正式化；对于沿用这些思想的分析可参看 Moulin(1988)。

Lucas (1992)和 Maschler (1992)是涵盖了第 14.2 和 14.3 节中模型的概览。

299 # 第 15 章

纳 什 解

在本章我们从联盟博弈理论的角度来研究两人讨价还价的问题。我们按异议和反异议的说法来给出纳什解[①]的定义并公理性地描述该解的性质。同时我们还将探讨纳什解与轮流出价讨价还价博弈的子博弈精炼均衡结果之间的联系。

15.1 讨价还价问题

在第 7 章我们使用扩展博弈理论的工具讨论了两人讨价还价问题。这里我们使用联盟博弈理论的方法来这样做。我们定义一个**讨价还价问题**(bargaining problem)为一四元组$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$，在其中 X 是两个参与人能共同得到的可能结果的一个集合，$D\in X$ 是若参与人达不成协议将发生的事件，$\succsim_1$ 和$\succsim_2$ 是参与人关于在 X 上的不确定事件集合$\mathcal{L}(X)$的偏好关系。我们称 X 为可能协议(agreement)集合并称 D 为达不成协议(disagreement)结果。注意这样一个四元组等同于一个无可转移支付联盟博弈$\langle \{1,2\}, \mathcal{L}(X), V, (\succsim_i)\rangle$，其中 $V(\{1,2\})=X$ 且对 $i=1,2$ 有 $V(\{i\})=\{D\}$。(参看定义 268.2)

X 的元素应该被认为是确定性的。注意我们要求参与人的偏好关系定义在 X 上的不确定事件集合上，而非简单地定义在 X 本身上。即，每个偏好关系不仅包括参与人关于可能联合行动集合的偏好还包括他对风险的态度。我们用 $p\cdot x\oplus(1-p)\cdot y$ 表示给 x 以概率 p 和给 y 以概率 $1-p$ 的不确定事件并用$p\cdot x$ 表示不确定事件 $p\cdot x\oplus(1-p)\cdot D$。

300

① 纳什解与在第一、二、三编中所研究的纳什均衡概念间的惟一联系是 John Nash。

我们关于讨价还价问题的基本定义包含一些如下的约束。

▶定义 300.1 **一个讨价还价问题**(a bargaining problem)是一四元组 $\langle X, D, \succsim_1 \succsim_2\rangle$，这里

• X(协议集合)是一紧集(例如，在欧氏空间)

• D(达不成协议的结果)是 X 的一个元素

• $\succsim_1$ 和 $\succsim_2$ 是关于 X 上的不确定事件集合 $L(X)$ 的满足 von Neumann 和 Morgenstern 假设的连续偏好关系。

• 对所有 $x \in X$ 和 $i = 1,2$，有 $x \succsim_i D$。并且，存在 $x \in X$ 使得 $x \succ_1 D$ 和 $x \succ_2 D$。

• (凸性)对任一 $x \in X$，$y \in X$ 及 $p \in [0,1]$ 总存在 $z \in X$ 使得对 $i = 1$，2 有 $z \sim_i p \cdot x \oplus (1-p) \cdot y$。

• (非冗余性)如果 $x \in X$ 那么不存在满足 $x' \neq x$ 的 $x' \in X$ 使得对 $i = 1,2$ 有 $x \sim_i x'$。

• (惟一最优协议)对每个参与人 i 总存在惟一一个协议 $B_i \in X$ 满足对所有 $x \in X$ 有 $B_i \succsim_i x$。

• 对每个参与人 i 我们有：对 $j \neq i$ 有 $B_i \sim_j D$。

这些假设中的前三个保证了每个参与人在 $L(X)$ 上的偏好关系可由某个 X 上的连续函数(参与人的 v-N-M 效用函数)的期望表示。第四个假设意味了达不成协议是最坏的可能结果，并且在下列意义下问题是非退化的：对于两个参与人来说，总存在一个比达不成协议更吸引人的协议。凸性假设要求协议集合足够丰富，使得每个不确定事件对两个参与人来说针对某个(确定性的)协议是等价的。最后三个假设是为了便利而作的。非冗余假设意味着我们将对于两个参与人无差别的任何两个协议作为等同的。惟一最优协议的假设蕴含了对每个参与人最优协议是强帕累托有效(即，不存在对一个参与人更好且对另一个至少一样好的协议)。最后一个假设意味了每个参与人在达不成协议与另一个参与人获得他喜欢的协议的结果间是无差别的。 301

给定我们关于参与人偏好的假设，我们能将任一讨价还价问题 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$ 和任何代表了 $\succsim_1$ 和 $\succsim_2$ 的 v-N-M 效用函数 u_1 和 u_2 与一个二元组 $\langle U, d\rangle$ 联系起来，其中 $U = \{(u_1(x), u_2(x)) : x \in X\}$ 且 $d = (u_1(D), u_2(D))$；我们可选择 u_1 和 u_2 使得 $d = (0,0)$。我们的假设蕴含

了 U 是紧的和凸的且包含了一个点 y，其满足对 $i=1,2$ 有 $y_i>d_i$。在纳什解的标准处理中这样一个二元组 $\langle U,d\rangle$，而非像物理的协议和参与人的偏好关系的 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$ 的一个描述，被认为是基本要素；我们发现协议和偏好关系的语言更自然。注意具有不同协议集合和偏好关系的讨价还价问题能导致相同的二元组 $\langle U,d\rangle$：一个讨价还价问题比这样一个二元组包含了更多信息。

现在我们的目标是构造解决讨价还价问题的方法的合理系统描述。讨价还价解的概念是这样一个系统描述的正式表达。

▶定义 301.1　一个**讨价还价解**(bargaining solution)是对每个讨价还价问题 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$ 赋 X 的惟一一个元素的函数。

讨价还价解描述了协议(或达不成协议)依赖于讨价还价问题的参数的方法。我们研究的讨价还价理论将注意力集中于参与人的风险态度对讨价还价结果的影响。可选择的理论将注意力集中于别的相关因素(例如参与人的时间偏好或他们讨价还价的能力)，但这些理论要求我们改变模型的基本要素。

15.2 纳什解：定义和特性表示

15.2.1 定义

我们现在定义本章中所研究的解的概念。

▶定义 301.2　**纳什解**(Nash solution)是对讨价还价问题 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$ 赋协议 $x^*\in X$ 的一个讨价还价解，

$$\begin{aligned}&\text{若对某个 } p\in[0,1] \text{ 和 } x\in X \text{ 有 } p\cdot x\succ_i x^*,\\&\text{则对 } j\neq i \text{ 有 } p\cdot x^*\succsim_j x.\end{aligned}\tag{301.3}$$

302　这个定义等价于结构类似于在前一章所给的讨价还价集合，内核和核仁的定义。为说明之，定义参与人 i 对协议 $x^*\in X$ 的一个**异议**(objection)

为一二元组(x,p)，其中$x\in X$和$p\in[0,1]$满足$p\cdot x\succ_i x^*$。其解释是：x是参与人i报出的一个可选择的协议，$1-p$是在参与人i施加他的异议情况下谈判破裂的概率。协议x和概率p由参与人i选择；概率p可由当参与人i施加他的协议应是x的这一要求时他所采取的行动间接确定(像威胁和恐吓)。因此参与人i有这样形式的论点"我要求结果x而非x^*，我以采取导致我们以概率$1-p$达不成协议的步骤相威胁以支持这个要求，这一威胁是可信的，因为如果我执行了它则结果是x，那么我将比现在更好。"如果$p\cdot x^*\succsim_j x$，那么参与人j可对(x,p)**持反异议**(counterobject)。其解释是：在参与人i通过他的异议所导致的风险条件下，对参与人j来说坚持初始协议x^*是可取的。因此参与人j的论点是"如果你采取将导致我们以概率$1-p$达不成协议的步骤，那么对我来说坚持x^*而非就x达成协议是可取的"。给定这些异议和反异议的定义，则纳什解是所有满足下列性质的协议x^*的集合：参与人j能针对参与人i对x^*的每个异议持反异议。

15.2.2 性质表示

我们现在证明纳什解划分明确并有一个简单性质：讨价还价问题$\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$的纳什解是最大化乘积$u_1(x)u_2(x)$的协议，这里$u_i$对$i=1,2$是代表了$\succsim_i$的一个 v-N-M 效用函数。

■命题 302.1

a. 协议$x^*\in X$是讨价还价问题$\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$的一纳什解当且仅当对所有$x\in X$有$u_1(x^*)u_2(x^*)\geqslant u_1(x)u_2(x)$，这里$u_i$对$i=1,2$是代表了$\succsim_i$且满足$u_i(D)=0$的一个 v-N-M 效用函数。

b. 纳什解划分明确(well-defined)。

证明：我们先证明(a)。假设对所有$x\in X$有$u_1(x^*)u_2(x^*)\geqslant u_1(x)u_2(x)$，那么对$i=1,2$有$u_i(x^*)>0$(因为$X$包含一个对$i=1,2$满足$u_i(y)>0$的协议$y$)。现在，若对某个$p\in[0,1]$有$pu_i(x)>u_i(x^*)$那么$pu_i(x)u_j(x^*)>u_i(x^*)u_j(x^*)\geqslant u_i(x)u_j(x)$，且因此$pu_j(x^*)>u_j(x)$(因为$u_i(x)>0$)，或$p\cdot x^*\succ_j x$。 303

现在假设x^*满足(301.3)：若对某个$p\in[0,1]$和$x\in X$有$p\cdot x\succ_i x^*$那么$p\cdot x^*\succsim_j x$。令$x\in X$满足对$i=1,2$有$u_i(x)>0$且对某个i有$u_i(x)>u_i(x^*)$。(对任一x的别的值我们显然有$u_1(x^*)u_2(x^*)\geqslant u_1(x)u_2$

(x)。)那么如果对某个 $p\in[0,1]$ 有 $p>u_i(x^*)/u_i(x)$ 那么我们有 $pu_j(x^*)\geqslant u_j(x)$，故，由 $u_j(x)>0$，我们有 $p\geqslant u_j(x)/u_j(x^*)$。因此 $u_i(x^*)/u_i(x)\geqslant u_j(x)/u_j(x^*)$，且因此有 $u_1(x^*)/u_2(x^*)\geqslant u_1(x)/u_2(x)$。

为了证明(b)，令 $U=\{(u_1(x),u_2(x)):x\in X\}$。由(a)，因此 x^* 是 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$ 的一个纳什解当且仅当 $(v_1,v_2)=(u_1(x^*),u_2(x^*))$ 在 U 上最大化了 v_1,v_2。由 U 是紧的，则该问题有一个解；由函数 v_1v_2 在 $\mathbb{R}^2_+$ 的内部是严格拟凹的和 U 是凸的，则解是惟一的。最后，由非冗余假设，则存在惟一的协议 $x^*\in X$，它产生最大化效用的二元组。 □

这个性质表示的简洁性是比较吸引人的，且考虑了纳什解的广泛应用。该性质表示也允许我们用几何图形去阐释纳什解，就像在图 304.1 中一样。尽管一个效用乘积的最大化是一个简单的数学运算，但是它缺乏一个直观解释；我们只是简单地视它为技术工具。起初纳什按这个性质表示的说法定义了解；我们发现定义 301.2 更可取，因为它有一个自然解释。

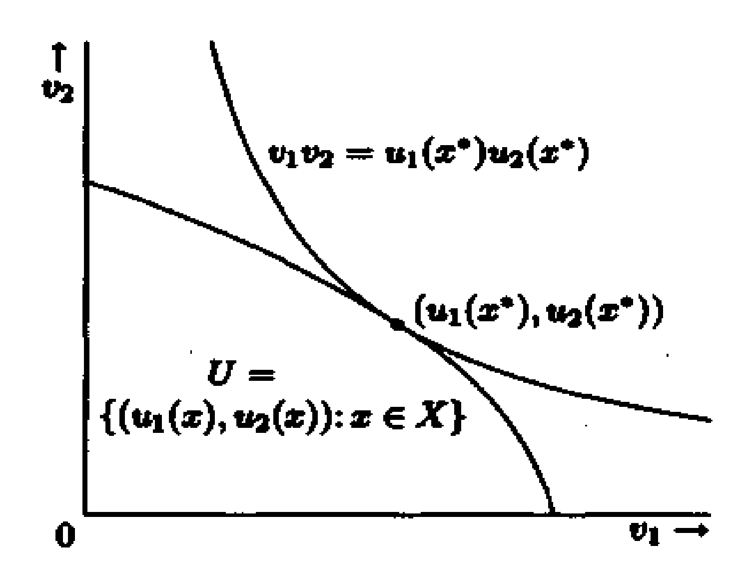


图 304.1 讨价还价问题 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$ 的纳什解 x^* 的一个几何性质表示。对 $i=1,2$ 函数 u_i 是代表了 $\succsim_i$ 且满足 $u_i(D)=0$ 的一个 v-N-M 效用函数。

15.2.3 风险厌恶的比较静态分析

纳什理论的一个主要目标是提供一个参与人对风险的态度与讨价还价结果间的联系。因此测试理论合理性的首要任务是此关系是否符合我们的直觉。我们比较两个讨价还价问题，其不同之处仅是这样的：一个参与人的

偏好关系在其中一个问题中比在另一个问题中对风险更加厌恶；我们将证明对那个参与人来说前一个问题的结果比后一问题的结果更坏。

定义偏好关系 $\succsim'_1$ 为至少与 $\succsim_1$ 一样风险厌恶的(at least as risk-averse as $\succsim_1$)如果 $\succsim_1$ 和 $\succsim'_1$ 就 X 达成协议并且只要对某个 $x \in X$ 和 $L \in \mathcal{L}(X)$，有 $x \sim_1 L$，则我们有 $x \succsim'_1 L$(这个定义等价于按效用表示的说法所给定的标准定义。)

304

■命题 304.1　令 x 和 x' 分别为讨价还价问题 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$ 和 $\langle X, D, \succsim'_1, \succsim_2 \rangle$ 的纳什解，这里 $\succsim'_1$ 至少与 $\succsim_1$ 一样是风险厌恶的。那么 $x \succsim_1 x'$。

证明：假设与结论相反有 $x' \succ_1 x$。由讨价还价问题的凸性存在一个协议 $z \in X$，使得对 $i=1,2$ 有 $z \sim_i \frac{1}{2} \cdot x' \oplus \frac{1}{2} \cdot x$。令 z^* 为一个对 $i=1,2$ 满足 $z^* \succsim_i z$ 的帕累托效率协议。由纳什解的性质表示(命题 302.1a)，协议 x 和 x' 是帕累托有效的，所以 $x \prec_1 z^* \prec_1 x'$ 和 $x' \prec_2 z^* \prec_2 x$。现在，由 x 是 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$ 的纳什解我们有 $u_1(x)u_2(x) > u_1(x')u_2(x')$。这里 u_i 对 $i=1,2$ 是代表了 $\succsim_i$ 且满足 $u_i(D)=0$ 的一个 v-N-M 效用函数。由函数 $H(v_1, v_2) = v_1 v_2$ 的拟凹性，我们有 $u_1(z)u_2(z) > u_1(x')u_2(x')$ 且因此 $u_1(z^*)u_2(z^*) > u_1(x')u_2(x')$。由 $x' \succ_1 z^*$ 从而 $1 > u_1(z^*)/u_1(x') > u_2(x')/u_2(z^*)$，所以存在 $p \in [0,1]$ 使得 $u_1(z^*)/u_1(x') > p > u_2(x')/u_2(z^*)$ 且因此 $p \cdot z^* \succ_2 x'$ 和 $z^* \succ_1 p \cdot x'$。由偏好关系 $\succsim'_1$ 至少与 $\succsim_1$ 一样风险厌恶，所以我们也有 $z^* \succ'_1 p \cdot x'$，因而 (z^*, p) 是参与人 2 对 x' 的一个没有反异议的异议，这与 x' 是 $\langle X, D, \succsim'_1, \succsim_2 \rangle$ 的纳什解这一事实相矛盾。□

305

15.3 一个公理性定义

15.3.1 公理

纳什解的美妙之处在于它仅由三个简单公理(性质)来刻画。在下列这些公理的叙述中 F 表示一个任意的讨价还价解。

PAR(帕累托效率)不存在这样的协议 $x \in X$,即对 $i=1,2$ 有 $x \succsim_i F(X, D, \succsim_1, \succsim_2)$且至少对一个 i 是严格偏好。

PAR 的标准辩护理由是:一个无效率的结果不太可能发生,因为它给使两个参与人更好的重新谈判留有余地。纳什解满足 PAR 这一事实从命题 302.1a 立即可知。

为了叙述下一个公理我们需要首先定义一个对称讨价还价问题。非正式地,一个讨价还价问题是对称的,如果有一个交换了参与人偏好关系的协议集合的重新标记:参与人 1 在重新标记了的问题中的偏好关系与参与人 2 在初始问题中的偏好关系一致,反之亦然。为了用不同的方式阐述这个定义,考虑这样一套语言系统,它包含了偏好关系的名称和异议点的名称,而不包括协议的名称。一个问题是对称的,如果在我们互换了参与人名字后通过用该语言中的格式所做的任一协议定义都确定了同一协议。

▶定义 305.1 一个讨价还价问题$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$是**对称的**(symmetric)如果有一个函数 $\phi: X \to X$,它满足 $\phi(D)=D$ 和 $\phi(x)=y$ 当且仅当 $\phi(y)=x$,使得 $L_1 \succsim_i L_2$,当且仅当对 $i \neq j$ 和对任意$\mathcal{L}(x)$中的不确定事件 L_1 和 L_2 有 $\phi(L_1) \succsim_j \phi(L_2)$,这里 $\phi(L)$是这样的不确定事件,即在 L 支集中的每个价格 x 由价格 $\phi(x)$取代。

我们称这个定义中的函数 $\phi: X \to X$ 为**对称函数**。一个对称讨价还价问题的例子是两个风险中立者分一块蛋糕,若他们达不成协议则一无所得(考虑由 $\phi(x_1, x_2)=(x_2, x_1)$给定的对称函数)。

SYM(对称性)若$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$是对称的且有对称函数 ϕ,那么 $\phi(F(X, D, \succsim_1, \succsim_2))=F(X, D, \succsim_1, \succsim_2)$。

认为这个公理是正确的理由是:我们寻找一个这样的解,即所有参与人间的不对称都被包括在讨价还价问题的描述之中。因此如果在某一特定问题中参与人 1 和 2 是难区别的,则赋给该问题的协议也应该是在他们间无差别的。

306

■引理 306.1 纳什解满足 SYM。

证明:令 x^* 是具有对称函数 ϕ 的对称讨价还价问题$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2 \rangle$的纳什解。假定 $\phi(x^*)$不是讨价还价问题$\langle X, D, \succsim_2, \succsim_1 \rangle$的纳什解。那么某个参与人 i 对 $\phi(x^*)$有一个不存在参与人 j 的反异议的异议(x, p):

$p\cdot x \succ_i \phi(x^*)$ 和 $p\cdot\phi(x^*) \prec_j x$。然而随后有 $\phi(p\cdot x)=p\cdot\phi(x)\succ_j\phi(\phi(x^*))=x^*$ 和 $\phi(p\cdot\phi(x^*))=p\cdot x^*\prec_i\phi(x)$，所以 $(\phi(x),p)$ 是参与人 j 对 x^* 的一个不存在参与人 i 反异议的异议，这与 x^* 是纳什解的事实相矛盾。□

最后一个公理是最具有争议的。

IIA(不相关替代的独立性)(Independence of irrelevant alternatives)令 $x^*=F(X,D,\succsim_1,\succsim_2)$ 且令 $\succsim'_i$ 为在 X 上与 $\succsim_i$ 达成协议的偏好关系并满足

• 若对某个 $x\in X$ 和 $p\in[0,1]$ 有 $x\succsim_i x^*$ 和 $p\cdot x\sim_i x^*$，那么 $p\cdot x\precsim'_i x^*$

• 若对某个 $x\in X$ 和 $p\in[0,1]$ 有 $x\precsim_i x^*$ 和 $x\sim'_i p\cdot x^*$ 那么 $x\sim'_i p\cdot x^*$。

则
$$F(X,D,\succsim_i,\succsim_j)=F(X,D,\succsim'_i,\succsim_j).$$
一个偏好关系是 $\succsim'_i$ 的参与人比一个偏好关系是 $\succsim_i$ 的参与人更担心下列风险：要求比 x^* 更好的替代结果但对比 x^* 更坏的替代有相同的态度。公理要求当参与人 i 有偏好关系 $\succsim'_i$ 时的结果同当参与人 i 有偏好关系 $\succsim_i$ 时一样，其思想是：如果开始时 x^* 经受住参与人 i 的异议则在一个他更不急于做异议的问题中(即，更少的二元组 (x,p) 是参与人 i 的异议)它也应经受住它们，它也应该继续经受住参与人 j 的异议，因为参与人 i 持反异议的能力未被改变。

注意不管公理的名称如何，它都包括了对于替代集合相同的两个问题的一个比较；所不同的是参与人的偏好。(名称来自于下列事实：公理类似于这样一个由纳什表示的公理，即它确实包括了对于具有不同协议集合的两个问题的一个比较)也要注意该公理不同于 PAR 和 SYM 之处在于它涉及到一个关于讨价还价问题的比较，而 PAR 和 SYM 对单个讨价还价问题的解施加条件。 307

■引理 307.1 纳什解满足 IIA。

证明：令 x^* 为讨价还价问题 $\langle X,D,\succsim_i,\succsim_j\rangle$ 的纳什解并令 $\succsim'_i$ 为满足 IIA 假设的偏好关系。考虑讨价还价问题 $\langle X,D,\succsim'_i,\succsim_j\rangle$。我们要证明在 $\langle X,D,\succsim'_1,\succsim_2\rangle$ 中对于 i 或 j 对 x^* 的每个异议总存在一个反异议，所以 x^* 是 $\langle X,D,\succsim'_1,\succsim_2\rangle$ 的纳什解。

首先假设参与人 i 有一个对 x^* 的异议：对某个 $x\in X$ 和 $p\in[0,1]$ 有

$x^*: p\cdot x \succ'_i x^*$。那么 $x \succ'_i x^*$ 且因此 $x \succ_i x^*$（因为 $\succsim_i$ 和 $\succsim'_i$ 在 X 上达成协议）。因而由 IIA 的第一部分我们有 $p\cdot x \succ_i x^*$（如果 $p\cdot x \precsim_i x^*$ 那么存在 $q \geq p$ 使得 $q\cdot x \sim_i x^*$ 且因而 $q\cdot x \precsim'_i x^*$，故 $p\cdot x \precsim'_i x^*$）。因为 x^* 是 $\langle X, D, \succsim_i, \succsim_j\rangle$ 的纳什解我们因此有 $p\cdot x^* \succsim_j x$。

现假设参与人 j 对 x^* 有一异议：对某个 $x \in X$ 和 $p \in [0,1]$ 有 $x^*: p\cdot x \succsim_j x^*$。由于 x^* 是帕累托有效的，我们有 $x^* \succsim_i x$ 且由 x^* 是 $\langle X, D, \succsim_i, \succsim_j\rangle$ 的纳什解，我们有 $p\cdot x^* \succsim_i x$。因此从 IIA 的第二部分我们有 $p\cdot x^* \succsim'_i x$。 □

15.3.2 性质表示

下列结论按上面讨论的公理 PAR、SYM 和 IIA 的说法完成了纳什解的性质表示。

■命题 307.2 纳什解是惟一满足 PAR、SYM 和 IIA 的讨价还价解。

证明：我们已经证明了纳什解满足三个公理；

我们现在证明惟一性。

步骤 1 令 x^* 为讨价还价问题 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$ 的纳什解。如果 $x \sim_i p\cdot x^*$ 那么 $[1/(2-p)]\cdot x \precsim_j x^*$.

证明：对每个参与人 i 选择代表了 $\succsim_i$ 且满足 $u_i(x^*)=1$ 和 $u_i(D)=0$ 的 v-N-M 效用函数 u_i。我们先证明对每个协议 $y \in X$ 我们有 $u_1(y)+u_2(y) \leq 2$。为说明之，假设相反对某个 $y \in X$ 我们有 $u_1(y)+u_2(y)=2+\epsilon$，$\epsilon>0$。由讨价还价问题的凸性，对每个 $p \in [0,1]$ 总存在一个对 $i=1,2$ 满足 $u_i(z(p)) = pu_i(y)+(1-p)u_i(x^*) = pu_i(y)+1-p$ 的协议 $z(p) \in X$，所以 $u_1(z(p))u_2(z(p)) = 1+\epsilon p + p^2[u_1(y)u_2(y)-1-\epsilon]$。因此对 p 足够接近 0，我们有 $u_1(z(p))u_2(z(p)) > 1 = u_1(x^*)u_2(x^*)$，这与 x^* 是问题的纳什解的事实相矛盾。现在，如果 $x \sim_i p\cdot x^*$ 我们有 $u_i(x)=p$ 且因此 $u_j(x) \leq 2-p$，所以 $[1/(2-p)]\cdot x \precsim_j x^*$。

308

步骤 2 任一满足 PAR、SYM 和 IIA 的讨价还价解是纳什解。

证明：令 x^* 是讨价还价问题 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$ 的纳什解，且令 F 为一满足 PAR、SYM 和 IIA 的讨价还价解。令 $\succsim'_1$ 和 $\succsim'_2$ 为在 X 上与 $\succsim_1$ 和 $\succsim_2$ 一致的偏好关系且满足下列性质。对任一帕累托效率协议 $x \in X$ 我们有：

• 对某个 $p\in[0,1]$ 若 $x\succ_1 x^*$ 和 $x\sim_2 p\cdot x^*$，则 $x\sim'_2 p\cdot x^*$ 且 $x^*\sim'_1[1/(2-p)]\cdot x$。

• 对某个 $p\in[0,1]$ 若 $x\prec_1 x^*$ 和 $x\sim_1 p\cdot x^*$，则 $x\sim'_1 p\cdot x^*$ 且 $x^*\sim'_2[1/(2-p)]\cdot x$

(这些条件完整地描述了一对满足 v-N-M 假设的偏好关系，因为对每个 $x\in X$ 和每个参与人 i 总存在某个帕累托效率协议 x' 满足 $x\sim_i x'$。)令 u_i 为代表 $\succsim'_i$ 且对 $i=1,2$ 满足 $u_i(D)=0$ 和 $u_i(x^*)=1$ 的 v-N-M 效用函数。那么对所有帕累托效率协议 $x\in X$ 有 $u_1(x)+u_2(x)=2$。

容易证明问题 $\langle X,D,\succsim'_1,\succsim'_2\rangle$ 是凸的。(一种方法是证明效用二元组集合是三角形 $\{(v_1,v_2): v_1+v_2\leqslant 2$, 且对 $i=1,2$ 有 $v_i\geqslant 0\}$。为证明之，利用事实：由 B_i 是帕累托有效的且 $B_i\sim_j D$，我们有 $u_j(B_i)=0$ 和 $u_i(B_i)=2$。)为证明问题是对称的，定义中 $\phi: X\to X$ 为 $\phi(D)=D$ 和 $[p\cdot B_1\sim'_1 x$ 且 $q\cdot B_2\sim'_2 x]$ 当且仅当 $[p\cdot B_2\sim'_2\phi(x)$ 且 $q\cdot B_1\sim'_1\phi(x)]$。该函数 ϕ 赋有效用 (v_1,v_2) 的一个协议给一个具有效用 (v_2,v_1) 的协议。因此，为 ϕ 的一个固定点的一个效率协议产生效用组合 $(1,1)$ 且因此由非冗余性是 x^*。故由 SYM 和 PAR 我们有 $F(X,D,\succsim'_1,\succsim'_2)=x^*$。

现在，一对问题 $\langle X,D,\succsim'_1,\succsim'_2\rangle$ 和 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim'_2\rangle$ 以及另一对问题 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$ 和 $\langle X,D,\succsim_1,\succsim'_2\rangle$ 都满足 IIA 的假设，因为由步骤 1 若 $x\sim_i p\cdot x^*$，则我们有 $[1/(2-p)]\cdot x\precsim_j x^*$。所以 $F(X,D,\succsim_1,\succsim_2)=F(X,D,\succsim'_1,\succsim'_2)=x^*$。 □

像较早注意到的那样，纳什定义一个讨价还价问题为一二元组 $\langle U,d\rangle$，这里 $U\subseteq\mathbb{R}^2$ 是一紧凸集(对协议的支付二元组集合)且 $d\in U$(在达不成协议的事件中的支付二元组)。在此背景下一个讨价还价解(bargaining solution)是一个对每个讨价还价问题 $\langle U,d\rangle$ 赋 U 中的一个点的函数。纳什证明了有惟一一个满足类似这些上面已考虑的公理的讨价还价解，并且这个解赋给讨价还价问题 $\langle U,d\rangle$ 以 U 中的支付二元组 (v_1,v_2)，对于它乘积 $(v_1-d_1)(v_2-d_2)$ 是最大的。下列练习请你证明这个结论。 309

? 练习 309.1 沿用前面结论证明的思路，试证明在标准纳什讨价还价模型中(像在前一段表示的那样)存在惟一一个讨价还价解，满足 PAR 和 SYM 的类似公理及下列两公理，在其中 f 表示一个讨价还价解。

(正仿射变换协方差)(Covariance with positive affine transformations)

令$\langle U,d\rangle$为一讨价还价问题，令$\alpha_i>0$和β_i为实数，令

$U'=\{(v'_1,v'_2):v'_i=\alpha_i v_i+\beta_i$；其中$i=1,2,(v_1,v_2)\in U\}$，

且对$i=1,2$令$d'_i=\alpha_i d_i+\beta_i$。那么对$i=1,2$有$f_i(U',d')=\alpha_i f_i(U,d)+\beta_i$。

(不相关替代的独立性)若$U\subseteq U'$且$f(U',d)\in U$那么$f(U',d)=f(U,d)$。

15.3.3 有多余的公理吗？

我们已证明了公理PAR，SYM和IIA惟一地确定了纳什解，现在我们证明这些公理中的任何一个都不是多余的。我们通过对每个公理提供一个不同于纳什的且满足其余两个公理的讨价还价解来这样做，

PAR：考虑由$F(X,D,\succsim_1,\succsim_2)=D$定义的解。这个解满足SYM和IIA且不同于纳什解。

? 练习309.2　试证明存在一个不同于纳什解而满足SYM和IIA的解F，且对$i=1,2$有$F(X,D,\succsim_1,\succsim_2)\succ_i D$（严格个人理性）。Roth(1977)证明了在标准纳什讨价还价模型中（像在上个练习中所表示）公理SYM和IIA和严格个人理性可充分描述纳什解的性质。并考虑了差异。

SYM：对每个$\alpha\in(0,1)$考虑，对$\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$赋协议$x^*$的解（一个不对称纳什解），它满足对所有$x\in X$有$(u_1(x^*))^\alpha(u_2(x^*))^{1-\alpha}\geq(u_1(x))^\alpha(u_2(x))^{1-\alpha}$，这里$u_1$和$u_2$代表了$\succsim_1$和$\succsim_2$且对$i=1,2$满足$u_i(D)=0$。

310　? 练习310.1　试证明任一非对称纳什解划分明确（它选择的协议不依赖于选来表示偏好的效用函数），满足PAR和IIA且对$\alpha\neq\frac{1}{2}$不同于纳什解。

IIA：令$\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$为一讨价还价问题，并对$i=1,2$令$u_i$为代表$\succsim_i$且满足$u_i(D)=0$的效用函数。(Kalai-Smorodinsky)解对$\langle X,D,\succsim_1,\succsim_2\rangle$赋帕累托效率协议$x$，对于它有$u_1(x)/u_2(x)=u_1(B_1)/u_2(B_2)$。

? 练习310.2　试证明Kalai-Smorodinsky解划分明确，满足SYM和PAR且不同于纳什解。

15.4 纳什解和轮流出价讨价还价博弈

我们现在证明纳什解与第7章所研究的轮流出价讨价还价博弈的子博弈精炼均衡结果间存在一个紧密关系，尽管用来推导它们的方法是不一样的。

固定一个讨价还价问题$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$且考虑在第7.4.4节所描述的轮流出价讨价还价博弈的形式，在其中协议集合是X，参与人的偏好关系是$\succsim_1$和$\succsim_2$，在一个时期结束时谈判破裂这一以概率$\alpha\in(0,1)$所发生的事件所导致的结果是D。在类似于A1－A4(第7.3.1节)假设下面这个博弈有惟一一个子博弈精炼均衡结果：参与人1提出$x^*(\alpha)$，参与人2接受它，这里$(x^*(\alpha), y^*(\alpha))$是满足$(1-\alpha)\cdot x^*(\alpha)\sim_1 y^*(\alpha)$和$(1-\alpha)\cdot y^*(\alpha)\sim_2 x^*(\alpha)$(见练习130.2)的帕累托效率协议二元组。

■命题310.3 令$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$为一讨价还价问题。由在与该讨价还价问题相联系的轮流出价讨价还价博弈变形的每一个子博弈精炼均衡中的参与人提出协议$x^*(\alpha)$和$y^*(\alpha)$，在$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$中在任一拒绝之后存在一个破裂概率$\alpha$，当$\alpha\to 0$时，$x^*(\alpha)$和$y^*(\alpha)$两者都收敛于$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$的纳什解。

证明：对$i=1,2$令u_i代表了偏好关系$\succsim_i$且满足$u_i(D)=0$。从定义$x^*(\alpha)$和$y^*(\alpha)$的条件，有$u_1(x^*(\alpha))u_2(x^*(\alpha))=u_1(y^*(\alpha))u_2(y^*(\alpha))$。由于对所有$\alpha\in[0,1)$，有$x^*(\alpha)\succ_1 y^*(\alpha)$，我们有$x^*(\alpha)\succsim_1 z^*\succsim_1 y^*(\alpha)$，这里$z^*$是$\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$的纳什解(见图311.1)。对任一收敛到0的序列$(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$我们由$x^*(\alpha_k)$和$y^*(\alpha_k)$的定义对$i=1,2$，有$u_i(x^*(\alpha_k))-u_i(y^*(\alpha_k))\to 0$，所以对$i=1,2$有$u_i(x^*(\alpha_k))$和$u_i(y^*(\alpha_k))$收敛到$u_i(z^*)$，且因此$x^*(\alpha_k)$和$y^*(\alpha_k)$收敛到$z^*$(使用非冗余性)。 □

311

15.5 纳什解的一个精确实施

我们现在讨论在第10章所描述的实施理论。上部分中结论的一个副

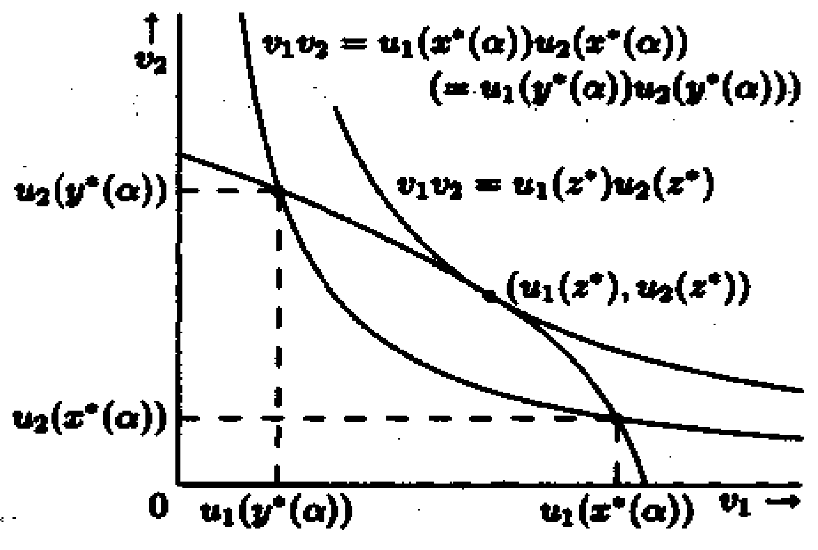


图 311.1 命题 310.3 证明的一个图解

产品是具有破裂风险的轮流出价讨价博弈近似 SPE－实施纳什解。我们现在描述一个精确(exactly)实施它的完全信息扩展博弈。从计划者的观点看这个博弈具有的优点是，在它仅涉及少数阶段意义上它较简单。然而，它的缺点是离我们熟悉的讨价还价过程太远。

固定一个集合 X 和一个事件 D 并假设计划者对所有满足 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$ 是一讨价还价问题的二元组 $(\succsim_1, \succsim_2)$ 都想实施纳什解。考虑包含下列阶段的(完全信息和偶然事件行动)扩展博弈形式。

312

- 参与人 1 选 $y \in X$。
- 参与人 2 选 $x \in X$ 和 $p \in [0,1]$。
- 以概率 $1-p$ 博弈结束，结果是 D；以概率 p 它继续。
- 参与人 1 选择 x 或不确定事件 $p \cdot y$；这个选择是结果。

■命题 312.1　上面描述的博弈形式 SPE-实施纳什解。

☑练习312.2　令 x^* 为 $\langle X, D, \succsim_1, \succsim_2\rangle$ 的纳什解，使用下列步骤去证明：当参与人的偏好是 $(\succsim_1, \succsim_2)$ 时 x^* 是博弈形式的惟一子博弈精炼均衡结果。

[注解]

关于本章主题具有创意性的论文是 Nash(1950b)：

我们所提供的是效仿 Rubinstein, Safra 和 Thomson(1992)。Zeuthen(1930, Ch. IV)包含了一个早期模型，在其中当谈判者提出要求时，他们中有破裂的风险意识。纳什解与轮流出价讨价还价博弈的子博弈精炼均衡结果间的联系最早由 Binmore(1987)指出并由 Binmore, Rubinstein 和 Wolinsky(1986)进一步考察。第15.5节中的纳什解的精确实施应归于 Howard(1992)。

第15.2.3节中涉及到参与人风险嫌恶程度对解的影响的比较静态分析结论最早由 Kihlstrom, Roth 和 Schmeidler(1981)探讨。Harsanyi 和 Selten(1972)研究了在第15.3.3节所描述的不对称纳什解(公理化出现于 Kalai(1977)和 Roth(1979, p. 16))且 Kalai 和 Smorodinsky(1975)公理化了 Kalai-Smorodinsky 解。练习309.2基于 Roth(1977)。

一些别的论文(例 Roemer(1988))研究了很多这样的模型，即在其中物理协议集合而非所导致的效用二元组集合(像在纳什模型中)是一基本要素。Roth(1979)和 Kalai(1985)是公理性讨价还价理论领域的概览。

结论一览表

这是一份本书主要结论的非正式叙述一览表。它使得我们对所学习的结论的性质有个大致的了解。并非所有条件都被包括在叙述之中；详情请参考本书中的完整叙述。

战略博弈

纳什均衡和混合战略纳什均衡

■（纳什均衡的存在性） 所有这样的博弈都有一个纳什均衡，即每个参与人的行动集合是紧的和凸的，并且每个参与人的偏好关系是连续的和拟凹的。 命题 20.3

■一个对称博弈有一个对称纳什均衡。 练习 20.4

■在一个有一纳什均衡的严格竞争博弈中，一组行动是一纳什均衡当且仅当每个行动都是一最大最小化者。 命题 22.2

■（混合战略纳什均衡的存在性） 每一个有限博弈都有一个混合战略纳什均衡。 命题 33.1

■一个混合战略组合是一个有限博弈的混合战略纳什均衡当且仅当每个参与人对于在他均衡战略支集上的所有行动都是无差异的。 引理 33.2

■在一有限两人战略博弈中的一个战略组合是一个颤抖手精炼均衡当且仅当它是混合战略纳什均衡并且没有参与人的战略是弱劣的。 命题 248.2

■(颤抖手精炼均衡的存在性) 每一个有限战略博弈都有一个颤抖手精炼均衡。 命题249.1

相关均衡

■每一个混合战略纳什均衡都对应一个相关均衡。 命题45.3

■相关均衡支付组合的每个凸组合都是一个相关均衡支付组合。 命题46.2

■每个相关均衡的结果都是这样一个相关均衡的结果,即状态集合是行动组合集合。 命题47.1

可理性化

■在一个相关均衡中以正概率被采用的每一个行动都是可理性化的。 引理56.2

■一个行动是一永非最优反应当且仅当它是强劣的。 引理60.1

■一个不是弱劣的行动是对一完全混合信念的最优反应。 练习64.2

■经过反复剔除强劣行动后所剩下的行动是可理性化的。 命题61.2

知识

■(个人间不能彼此同意保留不同意见) 如果两个人具有相同偏好并且他们的后验概率是共同知识,那么这些概率分布是相同的。 命题75.1

■如果每个参与人是理性的、知道别的参与人的行动并且具有一个与他的知识相一致的信念,那么该行动组合是一纳什均衡。 命题77.1

■如果有两个参与人,每个参与人知道别的参与人是理性的,同时知道别的参与人的信念概率分布,并且具有一个与他的知识相一致的信念概率分布,则这组概率分布是一混合战略纳什均衡。 命题78.1

■如果每个参与人是理性的和每个参与人的信念是与他的知识相一致的都是共同知识,那么每个参与人的行动是可理性化的。 命题80.1

■如果所有参与人在所有状态中都是理性的,每个参与人在每个状态中的信念都派生于一个共同信念,并且在给定每个参与人信息分割数目的情况下他们的行动在所有状态中都是相同的,则信息分割和行动对应于一

个相关均衡。 练习 81.1

完全信息扩展博弈

基本理论

■一个战略组合是一有限边界博弈的子博弈精炼均衡当且仅当它具有一次偏离性质。 引理 98.2，练习 102.1，练习 103.1

■(子博弈精炼均衡的存在性：库恩定理) 每一个有限博弈都有一个子博弈精炼均衡。 命题 99.2，练习 102.1

■在一个满足非无差异条件的有限博弈的所有子博弈精炼均衡中，所有参与人都是无差异的，并且所有均衡都是可互换的。 练习 100.2

讨价还价博弈

■一个满足 A_1—A_4 的轮流出价讨价还价博弈有惟一的子博弈精炼均衡结果。 命题 122.1

■在一个轮流出价讨价还价博弈的一个子博弈精炼均衡中，一个参与人越有耐心，则所得越少。 命题 126.1

无限次重复博弈

■(均值极限的纳什无名氏定理) 成分博弈的每一个可行的可实施支付组合都是均值极限无限次重复博弈的一个纳什均衡支付组合。

命题 144.3

■(贴现的纳什无名氏定理) 成分博弈的每一个可行的严格可实施支付组合在一个足够接近于 1 的贴现率下都接近于贴现无限次重复博弈的一个纳什均衡支付组合。 命题 145.2

■(均值极限的精炼无名氏定理) 成分博弈的每一个可行的严格可实施支付组合是均值极限无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡支付组合。

命题 146.2

■(超越精炼无名氏定理)　对于成分博弈的每一个严格可实施结果总存在包含该结果的超越无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡。

命题 149.1

■对于一个满维成分博弈的每个可行的严格可实施结果总存在一个足够接近于 1 的贴现率,使得对于它来说存在一个包含该结果重现的贴现无限次重复博弈的子博弈精炼均衡。　命题 151.1

■一个战略组合是一贴现无限次重复博弈的一个子博弈精炼均衡当且仅当它具有一次偏离性质。　引理 153.1

■对一个贴现无限次重复博弈的任一子博弈精炼均衡结果来说都存在一个产生相同结果的战略组合,在该结果中紧随偏离的行动组合序列仅依赖于偏离者的个性(而不依赖于历史或偏离的特征)。

命题 154.1

■在贴现无限次重复博弈的每一个机器博弈的均衡中,由重复博弈中两机器所挑选的行动间存在一一对应关系。　引理 170.1

■一个贴现无限次重复博弈的每一个机器博弈均衡都包含一个导入阶段,在其中所有状态都是不一样的并随后有一循环阶段,在每个循环中每个状态至多出现一次。　命题 171.1

有限次重复博弈

■如果在成分博弈的每个纳什均衡中的支付组合是最小最大支付组合,那么有限次重复博弈的每个纳什均衡都产生一个成分博弈纳什均衡序列。　命题 155.1

■(有限次重复博弈的纳什无名氏定理)　如果成分博弈有一个每个参与人的支付都超过他的最小最大支付的纳什均衡,那么对任一严格可实施结果存在有限次重复博弈的这样一个纳什均衡,即每个参与人的支付接近于他从该结果所得的支付。　命题 156.1

■如果成分博弈有唯一的纳什均衡支付组合,那么有限次重复博弈的每一个子博弈精炼均衡都产生成分博弈的一个纳什均衡序列。

命题 157.2

■(有限次重复博弈的精炼无名氏定理)　如果成分博弈是满维的并且对每个参与人来说存在两个能获得不同支付的纳什均衡,那么对任一严格可实施结果来说一个足够长的有限次重复博弈有这样一个子博弈精炼均衡,即每个参与人的支付接近于他从该结果所得的支付。

命题 160.1

实施理论

■(Gibbard-Satterthwait 定理) 在一个至少有三种结果并且任何偏好排序都是可能的环境中，任一一个这样的选择规则都是独裁的，即它是DSE-可实施的并且满足这样的条件：对任一结果总存在选择规则导致该结果的一个偏好组合。 命题 181.2

■(DSE-实施的显示原理) 如果一个选择规则是DSE-可实施的，那么它是真正DSE-可实施的。 引理 181.4

■(纳什-可实施的显示原理) 如果一个选择规则是纳什-可实施的，那么它是真正纳什-可实施的。 引理 185.2

■如果一个选择规则是纳什-可实施的，那么它是单调的。

命题 186.2

■在一个至少有三个参与人的环境中，一个单调且无否决权的选择规则是纳什-可实施的。 命题 187.2

■在一个至少有三个参与人并且参与人能被要求支付货币罚款的环境中，每一个选择函数都是真正地SPE-可实施的。 命题 193.1

不完全信息扩展博弈

■对于一个完全记忆有限扩展博弈中某个参与人的任一混合战略都存在一个结果等价的行为战略。 命题 214.1

■与一个可观察行动的有限贝叶斯博弈相联系的扩展博弈的每个序贯均衡都导致该贝叶斯博弈的一个精炼贝叶斯均衡。 命题 234.1

■一个完全记忆有限扩展博弈的每个颤抖手精炼均衡都与一个序贯均衡相联系。 命题 251.2

■(颤抖手精炼均衡与序贯均衡的存在性) 每一个完全记忆有限扩展博弈都有一个颤抖手精炼均衡并且因此有一个序贯均衡。

推论 253.2

联盟博弈

1 核

■一个可转移支付联盟博弈有一非空核当且仅当它是平衡的。

命题 262.1

■每一个可转移支付市场有一非空核。 命题 264.2

■一个可转移支付市场中的每一个竞争支付组合都在市场的核中。

命题 267.1

■一个交换经济中每个竞争分配都在核中。 命题 272.1

■如果每个代理人的偏好关系是递增的、严格拟凹的并且每个参与人的每种商品禀赋都是正的，那么核收敛于竞争分配集合。

命题 273.1

稳定集合

■核是每个稳定集合的一个子集;任一稳定集合都不是任一个别的稳定集合的真子集;如果核是一个稳定集合,那么它是惟一的稳定集合。

命题 279.2

讨价还价集、核、核仁

■在一个可转移支付联盟博弈中核仁是核的一个元素,而核又是讨价还价集合的一个子集。 引理 285.1 和 287.1

■任何可转移支付联盟博弈的核仁都是单元素集。 命题 288.4

夏普里值

■满足平衡贡献性质的惟一值是夏普里值。 命题 291.3

■夏普里值是惟一满足 SYM、DUM 和 ADD 公理的值。 命题 293.1

纳什解

■用异议和反异议所表述的一个讨价还价问题的纳什解的定义等价于用最大化参与人 V－N－M 效用乘积的协议来表述的定义。　命题 302.1

■在一个纳什解中一个参与人越是厌恶风险则他的所得支付越少。　命题 304.1

■纳什解是惟一满足下列公理的讨价还价解：帕累托有效、对称以及不相关选择的独立性。　命题 307.2

■在存在破裂风险的轮流出价讨价还价博弈变形的每一个子博弈精炼均衡结果中，由参与人提出的协议收敛于纳什解。　命题 310.3

参考书目

Abreu, D. (1988), "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting", *Econometrica* **56**, 383—396. [160]

Abreu, D., P.K.Dutta, and L.Smith (1994), "The Folk Theorem for Repeated Games: A NEU Condition", *Econometrica* **62**, 939—948. [160]

Abreu, D., and H. Matsushima (1992), "Virtual Implementation in Iteratively Undominated Strategies: Complete Information", *Econometrica* **60**, 993—1008. [195]

Abreu, D., and A. Rubinstein (1988), "The Structure of Nash Equilibrium in Repeated Games with Finite Automata", *Econometrica* **56**, 1259—1281. [175]

Arrow, K.J., E.W.Barankin, and D.Blackwell (1953), "Admissible Points of Convex Sets", pp. 87—91 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅱ (Annals of Mathematics Studies, 28) (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press. [52, 65]

Arrow, K.J., and F.H. Hahn (1971), *General Competitive Analysis*. San Francisco: Holden-Day. [270]

Aumann, R. J. (1959), "Acceptable Points in General Cooperative *n*-Person Games", pp. 287—324 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅳ (Annals of Mathematics Studies, 40) (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Princeton: Princeton University Press. [160]

Aumann, R. J. (1964), "Markets with a Continuum of Traders", *Econometrica* **32**, 39—50. [275]

Aumann, R. J. (1974), "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies", *Journal of Mathematical Economics* **1**, 67—96. [51]

Aumann, R. J. (1975), "Values of Markets with a Continuum of

Traders", *Econometrica* **43**, 611—646.[294]

Aumann, R.J. (1976), "Agreeing to Disagree", *Annals of Statistics* **4**, 1236—1239.[84]

Aumann, R.J. (1985a), "An Axiomatization of the Non-Transferable Utility Value", *Econometrica* **53**, 599—612.[298]

Aumann, R.J. (1985b), "What Is Game Theory Trying to Accomplish?", pp.28—76 in *Frontiers of Economics* (K.J.Arrow and S. Honkapohja, eds.), Oxford: Basil Blackwell.[8]

Aumann, R.J. (1986), "Rejoinder", *Econometrica* **54**, 985—989. [297]

Aumann, R.J. (1987a), "Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality", *Econometrica* **55**, 1—18.[51,85]

Aumann, R.J. (1987b), "Game Theory", pp.460—482 in *The New Palgrave*, Volume 2(J.Eatwell, M.Milgate, and P.Newman, eds.), London: Macmillan.[8]

Aumann, R.J. (1989), *Lectures on Game Theory*. Boulder: Westview Press.[275,297]

Aumann, R.J., and A.Brandenburger(1995), "Epistemic Conditions for Nash Equilibrium", *Econometrica* **63**, 1161—1180.[80,84]

Aumann, R.J., and M.Maschler (1964), "The Bargaining Set for Cooperative Games", pp. 443—476 in *Advances in Game Theory* (Annals of Mathematics Studies, 52)(M.Dresher, L.S.Shapley, and A.W.Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press.[297]

Aumann, R.J., and M.Maschler (1972), "Some Thoughts on the Minimax Principle", *Management Science* **18**, P-54—P-63.[218]

Aumann, R.J., and B.Peleg (1960), "Von Neumann-Morgenstern Solutions to Cooperative Games without Side Payments", *Bulletin of the American Mathematical Society* **66**, 173—179.[275,298]

Aumann, R.J., and L.S.Shapley (1994), "Long-Term Competition—A Game-Theoretic Analysis", pp.1—15 in *Essays in Game Theory* (N. Megiddo, ed.), New York: Springer-Verlag.[160]

Bacharach, M. (1985), "Some Extensions of a Claim of Aumann in an Axiomatic Model of Knowledge", *Journal of Economic Theory* **37**, 167—190.[85]

Banks, J.S., and J.Sobel (1987), "Equilibrium Selection in Signaling Games", *Econometrica* **55**, 647—661.[246,254]

Barberá, S. (1983), "Strategy-Proofness and Pivotal Voters: A Direct Proof of the Gibbard-Satterthwaite Theorem", *International Economic Review* **24**, 413—417.[195]

Battigalli, P. (1988), "Implementable Strategies, Prior Information and the Problem of Credibility in Extensive Games", *Rivista Internazionale di Scienze Economiche e Commerciali* **35**, 705—733.[254]

Battigalli, P. (1996), "Strategic Independence and Perfect Bayesian Equilibria", *Journal of Economic Theory*, **70**,201—234.[254]

Battigalli, P., M.Gilli, and M.C.Molinari (1992), "Learning and Convergence to Equilibrium in Repeated Strategic Interactions: An Introductory Survey", *Ricerche Economiche* **46**,335—377.[52]

Benoît, J.-P., and V.Krishna (1985), "Finitely Repeated Games", *Econometrica* 53, 905—922.[160,161]

Benoît, J.-P., and V.Krishna (1987), "Nash Equilibria of Finitely Repeated Games", *International Journal of Game Theory* **16**, 197—204.[160]

Ben-Porath, E., and E.Dekel (1992), "Signaling Future Actions and the Potential for Sacrifice", *Journal of Economic Theory* **57**, 36—51.[115]

Ben-Porath, E., and B.Peleg (1987), "On the Folk Theorem and Finite Automata", Research Memorandum 77, Center for Research in Mathematical Economics and Game Theory, Hebrew University, Jerusalem.[161]

Bernheim, B.D. (1984), "Rationalizable Strategic Behavior", *Econometrica* 52, 1007—1028.[64]

Billera, L.J. (1970), "Some Theorems on the Core of an n-Person Game without Side-Payments", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 18, 567—579.[269,275]

Billera, L.J., D.C.Heath, and J.Raanan (1978), "Internal Telephone Billing Rates-A Novel Application of Non-Atomic Game Theory", *Operations Research* **26**, 956—965.[297]

Binmore, K.G. (1985), "Bargaining and Coalitions", pp.269—304 in *Game-Theoretic Models of Bargaining* (A.E.Roth, ed.), Cambridge: Cambridge University Press.[131]

Binmore, K.G. (1987), "Nash Bargaining Theory Ⅱ", pp.61—76 in

The Economics of Bargaining (K. G. Binmore and P. Dasgupta, eds.), Oxford: Blackwell. [312]

Binmore, K. G. (1987/88), "Modeling Rational Players, Parts I and II", *Economics and Philosophy* **3**, 179—214 and **4**, 9—55. [5, 8]

Binmore, K. G. (1992), *Fun and Games*. Lexington, Massachusetts: D.C. Heath. [8]

Binmore, K. G., and A. Brandenburger (1990), "Common Knowledge and Game Theory", pp. 105—150 in *Essays on the Foundations of Game Theory* (K. G. Binmore), Oxford: Blackwell. [85]

Binmore, K. G., A. Rubinstein, and A. Wolinsky (1986), "The Nash Bargaining Solution in Economic Modelling", *Rand Journal of Economics* **17**, 176—188. [131, 312]

Bondareva, O. N. (Бондарева, О. Н.) (1963), "Некоторые Применения Методов Линейного Программирования к Теории Кооперативных Игр", *Проб^емы Кибернетики* (*Problemy Kibernetiki*) **10**, 119—139. [274]

Borel, E. (1921), "La Théorie du Jeu et les Equations Intégrales à Noyau Symétrique", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* (*Paris*) **173**, 1304—1308. (Translated as "The Theory of Play and Integral Equations with Skew Symmetric Kernels", *Econometrica* **21** (1953), pp. 97—100.) [29, 51]

Borel, E. (1924), *Eléments de la Théorie des Probabilités* (Third Edition). Paris: Librairie Scientifique, J. Hermann. (pp. 204—221 translated as "On Games That Involve Chance and the Skill of the Players", *Econometrica* **21** (1953), 101—115.) [51]

Borel, E. (1927), "Sur les Systèmes de Formes Linéaires à Déterminant Symétrique Gauche et la Théorie Générale du Jeu", *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* (*Paris*) **184**, 52—54. (Translated as "On Systems of Linear Forms of Skew Symmetric Determinant and the General Theory of Play", *Econometrica* **21** (1953), 116—117.) [51]

Brams, S. J., D. M. Kilgour, and M. D. Davis (1993), "Unraveling in Games of Sharing and Exchange", pp. 195—212 in *Frontiers of Game Theory* (K. G. Binmore, A. Kirman, and P. Tani, eds.), Cambridge, Mass.: MIT Press. [30]

Brams, S.J., and A.D.Taylor (1994), "Divide the Dollar: Three Solutions and Extensions", *Theory and Decision* **37**, 211—231. [65]

Brandenburger, A. (1992), "Knowledge and Equilibrium in Games", *Journal of Economic Perspectives* **6**, 83—101. [84]

Brown, G.W. (1951), "Iterative Solution of Games by Fictitious Play", pp. 374—376 in *Activity Analysis of Production and Allocation* (T.C. Koopmans, ed.), New York: Wiley. [52]

Carnap, R. (1966), *Philosophical Foundations of Physics*. New York: Basic Books. [5]

Cho, I.-K., and D.M. Kreps (1987), "Signaling Games and Stable Equilibria", *Quarterly Journal of Economics* **102**, 179—221. [254]

Chung, K.L. (1974), *A Course in Probability Theory* (Second Edition). New York: Academic Press. [7]

Clarke, E.H. (1971), "Multipart Pricing of Public Goods", *Public Choice* 11, 17—33. [183]

Cournot, A.A. (1838), *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Paris: Hachette. (English translation: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, New York: Macmillan, 1897.) [30]

Crawford, V.P. (1990), "Equilibrium without Independence", *Journal of Economic Theory* 50, 127—154. [52]

Davis, M., and M. Maschler (1963), "Existence of Stable Payoff Configurations for Cooperative Games", *Bulletin of the American Mathematical Society* 69, 106—108. [297]

Davis, M., and M. Maschler (1965), "The Kernel of a Cooperative Game", *Naval Research Logistics Quarterly* **12**, 223—259. [297]

Davis, M., and M. Maschler (1967), "Existence of Stable Payoff Configurations for Cooperative Games", pp. 39—52 in *Essays in Mathematical Economics* (M. Shubik, ed.), Princeton: Princeton University Press. [297]

Debreu, G., and H.E. Scarf (1963), "A Limit Theorem on the Core of an Economy", *International Economic Review* **4**, 235—246. [275]

Derman, C. (1970), *Finite State Markovian Decision Processes*. New York: Academic Press. [168]

Diamond, P.A. (1965), "The Evaluation of Infinite Utility Streams",

Econometrica 33, 170—177. [160]

Dubey, P., and M. Kaneko (1984), "Information Patterns and Nash Equilibria in Extensive Games: I", *Mathematical Social Sciences* 8, 111—139. [115]

Edgeworth, F. Y. (1881), *Mathematical Psychics*. London: Kegan Paul. [275]

Elmes, S., and P. J. Reny (1994), "On the Strategic Equivalence of Extensive Form Games", *Journal of Economic Theory* **62**, 1—23. [218]

Fishburn, P. C., and A. Rubinstein (1982), "Time Preference", *International Economic Review* 23, 677—694. [119, 131]

Forges, F. (1992), "Repeated Games of Incomplete Information: Non-Zero-Sum", pp. 155—177 in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1 (R. J. Aumann and S. Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland. [161]

Friedman, J. W. (1971), "A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames", *Review of Economic Studies* **38**, 1—12. [160]

Friedman, J. W. (1985), "Cooperative Equilibria in Finite Horizon Non-cooperative Supergames", *Journal of Economic Theory* 35, 390—398. [161]

Friedman, J. W. (1990), *Game Theory with Applications to Economics* (Second Edition). New York: Oxford University Press. [8, 275]

Fudenberg, D. (1992), " Explaining Cooperation and Commitment in Repeated Games", pp. 89—131 in *Advances in Economic Theory*, Volume I (J.-J. Laffont, ed.), Cambridge: Cambridge University Press. [161]

Fudenberg, D., and D. K. Levine (1989), "Reputation and Equilibrium Selection in Games with a Patient Player", *Econometrica* **57**, 759—778. [161]

Fudenberg, D., and E. S. Maskin (1986), "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information", *Econometrica* **54**, 533—554. [160, 161, 254]

Fudenberg, D., and E. S. Maskin (1991), "On the Dispensability of Public Randomization in Discounted Repeated Games", *Journal of Economic Theory* **53**, 428—438. [161]

Fudenberg, D., and J. Tirole (1991a), *Game Theory*. Cambridge,

Mass.: MIT Press.[8]

Fudenberg, D., and J. Tirole (1991b), "Perfect Bayesian Equilibrium and Sequential Equilibrium", *Journal of Economic Theory* **53**, 236—260. [254]

Gabay, D., and H. Moulin (1980), "On the Uniqueness and Stability of Nash-Equilibria in Noncooperative Games", pp. 271—293 in *Applied Stochastic Control in Econometrics and Management Science* (A. Bensoussan, P. Kleindorfer, and C. S. Tapiero, eds.), Amsterdam: North-Holland.[64]

Gale, D. (1953), "A Theory of *N*-Person Games with Perfect Information", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **39**, 496—501.[64]

Geanakoplos, J.(1992), "Common Knowledge", *Journal of Economic Perspectives* **6**, 53—82.[85]

Geanakoplos, J. (1994), "Common Knowledge", pp. 1437—1496 in *Handbook of Game Theory*, Volume 2 (R. J. Aumann and S. Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland.[85]

Gibbard, A.(1973), "Manipulation of Voting Schemes: A General Result", *Econometrica* **41**, 587—601.[195]

Gibbons, R.(1992), *Game Theory for Applied Economists*. Princeton: Princeton University Press. [8]

Gillies, D. B. (1959), "Solutions to General Non-Zero-Sum Games", pp.47—85 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅳ (Annals of Mathematics Studies, 40)(A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Princeton: Princeton University Press.[274]

Glazer, J., and C. A. Ma (1989), "Efficient Allocation of a 'Prize'—King Solomon's Dilemma", *Games and Economic Behavior* **1**, 222—233. [195]

Glazer, J. and M. Perry (1996), "Virtual Implementation in Backwards Induction", *Games and Economic Behavior* **15**, 27—32.[195]

Glicksberg, I. L. (1952), "A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points", *Proceedings of the American Mathematical Society* **3**, 170—174.[30, 33]

Green, J., and J.-J. Laffont (1977), "Characterization of Satisfactory Mechanisms for the Revelation of Preferences for Public Goods", *Econometri-*

ca 45, 427—438.[195]

Groves, T. (1973), "Incentives in Teams", *Econometrica* 41, 617—631.[183]

Groves, T., and M. Loeb (1975), "Incentives and Public Inputs", *Journal of Public Economics* **4**, 211—226.[195]

Guilbaud, G.T. (1961), "Faut-il Jouer au Plus Fin? (Notes sur l'Histoire de la Théorie des Jeux)", pp.171—182 in *La Décision*, Paris: Éditions du Centre National de la Recherce Scientifique.[51]

Gul, F. (1989), "Bargaining Foundations of Shapley Value", *Econometrica* **57**, 81—95.[298]

Halpern, J.Y. (1986), "Reasoning about Knowledge: An Overview", pp. 1—17 in *Theoretical Aspects of Reasoning about Knowledge* (J. Y. Halpern, ed.), Los Altos, California: Morgan Kaufmann.[85]

Harsanyi, J.C. (1963), "A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game", *International Economic Review* **4**, 194—220.[298]

Harsanyi, J.C. (1967/68), "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, Parts Ⅰ, Ⅱ, and Ⅲ", *Management Science* **14**, 159—182, 320—334, and 486—502.[28,30]

Harsanyi, J.C. (1973), "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed-Strategy Equilibrium Points", *International Journal of Game Theory* **2**, 1—23.[38,41,42,51]

Harsanyi, J.C. (1974), "An Equilibrium-Point Interpretation of Stable Sets and a Proposed Alternative Definition", *Management Science* (*Theory Series*) **20**, 1472—1495.[298]

Harsanyi, J.C. (1981), "The Shapley Value and the Risk-Dominance Solutions of Two Bargaining Models for Characteristic-Function Games", pp. 43—68 in *Essays in Game Theory and Mathematical Economics* (R.J. Aumann, J.C. Harsanyi, W. Hildenbrand, M. Maschler, M.A. Perles, J. Rosenmüller, R.Selten, M.Shubik, and G.L.Thompson), Mannheim: Bibliographisches Institut.[298]

Harsanyi, J.C., and R. Selten (1972), "A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information", *Management Science* **18**, P-80—P-106.[312]

Hart, S. (1985), "An Axiomatization of Harsanyi's Nontransferable U-

tility Solution", *Econometrica* **53**, 1295—1313. [298]

Hart, S., and A. Mas-Colell (1989), "Potential, Value, and Consistency", *Econometrica* **57**, 589—614. [297]

Hart, S. and A. Mas-Colell (1996), "Bargaining and Value", *Econometrica* **64**, 357—380. [296, 297, 298]

Hendon, E., H. J. Jacobsen, and B. Sloth (1996), "The One-Shot-Deviation Principle for Sequential Rationality" *Games and Economic Behavior* **12**, 274—282. [254]

Hintikka, J. (1962), *Knowledge and Belief*. Ithaca: Cornell University Press. [84]

Hotelling, H. (1929), "Stability in Competition", *Economic Journal* **39**, 41—57. [30]

Howard, J. V. (1992), "A Social Choice Rule and Its Implementation in Perfect Equilibrium", *Journal of Economic Theory* **56**, 142—159. [312]

Isbell, J. R. (1957), "Finitary Games", pp. 79—96 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅲ (Annals of Mathematics Studies, 39) (M. Dresher, A. W. Tucker, and P. Wolfe, eds.), Princeton: Princeton University Press. [218]

Kakutani, S. (1941), "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal* **8**, 457—459. [19]

Kalai, E. (1977), "Nonsymmetric Nash Solutions and Replications of 2—Person Bargaining", *International Journal of Game Theory* 6, 129—133. [312]

Kalai, E. (1985), "Solutions to the Bargaining Prolem", pp. 77—105 in *Social Goals and Social Organization* (L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds.), Cambridge: Cambridge University Press. [312]

Kalai, E., and M. Smorodinsky (1975), "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem", *Econometrica* **43**, 513—518. [312]

Kihlstrom, R. E., A. E. Roth, and D. Schmeidler (1981), "Risk Aversion and Solutions to Nash's Bargaining Problem", pp. 65—71 in *Game Theory and Mathematical Economics* (O. Moeschlin and D. Pallaschke, eds.), Amsterdam: North-Holland. [312]

Kohlberg, E. (1990), "Refinement of Nash Equilibrium: The Main Ideas", pp. 3—45 in *Game Theory and Applications* (T. Ichiishi, A. Ney-

man, and Y. Tauman, eds.), San Diego: Academic Press. [254]

Kohlberg, E., and J.-F. Mertens (1986), "On the Strategic Stability of Equilibria", *Econometrica* **54**, 1003—1037. [115, 254]

Kohlberg, E., and P. J. Reny (1997), "Independence on Relative Probability Spaces and Consistent Assessments in Game Trees", *Journal of Economic Theory* 75, 280-313.

Krelle, W. (1976), *Preistheorie* (Part 2). Tübingen: J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). [131]

Kreps, D.M. (1988), *Notes on the Theory of Choice*. Boulder: Westview Press. [8]

Kreps, D.M. (1990a), *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton: Princeton University Press. [8, 225]

Kreps, D. M. (1990b), *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford: Clarendon Press. [8, 254]

Kreps, D.M., and G. Ramey (1987), "Structural Consistency, Consistency, and Sequential Rationality", *Econometrica* **55**, 1331—1348. [254]

Kreps, D. M., and R. B. Wilson (1982a), "Reputation and Imperfect Information", *Journal of Economic Theory* **27**, 253—279. [115, 254]

Kreps, D.M., and R. B. Wilson (1982b), "Sequential Equilibria", *Econometrica* 50, 863—894. [252, 254]

Krishna, V. (1989), "The Folk Theorems for Repeated Games", Working Paper 89—003, Division of Research, Harvard Business School. [160, 161]

Krishna, V., and R. Serrano (1995), "Perfect Equilibria of a Model of *N*-Person Noncooperative Bargaining", *International Journal of Game Theory* **24**, 259—272. [296]

Kuhn, H.W. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information", pp. 193—216 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅱ (Annals of Mathematics Studies, 28) (H.W. Kuhn and A.W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press. [114, 115, 217, 218]

Kuhn, H.W. (1968), "Preface" to "Waldegrave's Comments: Excerpt from Montmort's Letter to Nicholas Bernoulli", pp. 3—6 in *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology* (Series of Reprints of Scarce Works on Political Economy, 19) (W. J. Baumol and S. M. Goldfeld, eds.), London:

London School of Economics and Political Science. [30, 51]

Lewis, D. K. (1969), *Convention*. Cambridge: Harvard University Press. [84]

Littlewood, J. E. (1953), *A Mathematician's Miscellany*. London: Methuen. [71, 85]

Lucas, W.F. (1969), "The Proof That a Game May Not Have a Solution", *Transactions of the American Mathematical Society* **137**, 219—229. [279]

Lucas, W. F. (1992), "Von Neumann-Morgenstern Stable Sets", pp. 543—590 in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1 (R. J. Aumann and S. Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland. [298]

Luce, R.D., and H. Raiffa (1957), *Games and Decisions*. New York: John Wiley and Sons. [8, 15, 30, 64, 65, 160, 275, 293]

Madrigal, V., T.C.C. Tan, and S.R. da C. Werlang (1987), "Support Restrictions and Sequential Equilibria", *Journal of Economic Theory* **43**, 329—334. [254]

Maschler, M. (1976), "An Advantage of the Bargaining Set over the Core", *Journal of Economic Theory* **13**, 184—192. [297]

Maschler, M. (1992), "The Bargaining Set, Kernel, and Nucleolus", pp. 591—667 in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1 (R. J. Aumann and S. Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland. [298]

Maschler, M., and G. Owen (1989), "The Consistent Shapley Value for Hyperplane Games", *International Journal of Game Theory* **18**, 389—407. [298]

Maschler, M., and G. Owen (1992), "The Consistent Shapley Value for Games without Side Payments", pp. 5—12 in *Rational Interaction* (R. Selten, ed.), Berlin: Springer-Verlag. [298]

Maskin, E.S. (1985), "The Theory of Implementation in Nash Equilibrium: A Survey", pp. 173—204 in *Social Goals and Social Organization* (L. Hurwicz, D. Schmeidler, and H. Sonnenschein, eds.), Cambridge: Cambridge University Press. [195]

Maynard Smith, J. (1972), "Game Theory and the Evolution of Fighting", pp. 8—28 in *On Evolution* (J. Maynard Smith), Edinburgh: Edin-

burgh University Press. [51]

Maynard Smith, J. (1974), "The Theory of Games and the Evolution of Animal Conflicts", *Journal of Theoretical Biology* **47**, 209—221. [30, 51]

Maynard Smith, J. (1982), *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge: Cambridge University Press. [51]

Maynard Smith, J., and G. R. Price (1973), "The Logic of Animal Conflict", *Nature* **246**, 15—18. [51]

Mertens, J.-F. (1995), "Two Examples of Strategic Equilibrium", *Games and Economic Behavior* **8**, 378—388. [254]

Mertens, J.-F., and S. Zamir (1985), "Formulation of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information", *International Journal of Game Theory* **14**, 1—29. [29]

Milgrom, P. R., and D. J. Roberts(1982), "Predation, Reputation, and Entry Deterrence", *Journal of Economic Theory* **27**, 280—312. [115, 254]

Milgrom, P. R., and D. J. Roberts(1990), "Rationalizability, Learning, and Equilibrium in Games with Strategic Complementarities", *Econometrica* **58**, 1255—1277. [65]

Milgrom, P. R., and N. Stokey (1982), "Information, Trade and Common Knowledge", *Journal of Economic Theory* **26**, 17—27. [85]

Milnor, J. W., and L. S. Shapley (1978), "Values of Large Games Ⅱ: Oceanic Games", *Mathematics of Operations Research* **3**, 290—307. [297]

Moore, J. (1992), "Implementation, Contracts, and Renegotiation in Environments with Complete Information", pp. 182—282 in *Advances in Economic Theory*, Volume Ⅰ (J.-J. Laffont, ed.), Cambridge: Cambridge University Press. [196]

Moore, J., and R. Repullo (1988), "Subgame Perfect Implementation", *Econometrica* **56**, 1191—1220. [196]

Moulin, H. (1979), "Dominance Solvable Voting Schemes", *Econometrica* **47**, 1337—1351. [64, 65]

Moulin, H. (1984), "Dominance Solvability and Cournot Stability", *Mathematical Social Sciences* 7, 83—102. [64]

Moulin, H. (1986), *Game Theory for the Social Sciences* (Second Edition). New York: New York University Press. [8, 52, 64, 115, 275]

Moulin, H. (1988), *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cam-

bridge: Cambridge University Press. [275, 297, 298]

Muller, E., and M. A. Satterthwaite (1977), "The Equivalence of Strong Positive Association and Strategy-Proofness", *Journal of Economic Theory* **14**, 412—418. [189]

Muthoo, A. (1991), "A Note on Bargaining over a Finite Number of Feasible Agreements", *Economic Theory* **1**, 290—292. [131]

Myerson, R.B. (1977), "Graphs and Cooperation in Games", *Mathematics of Operations Research* **2**, 225—229. [297]

Myerson, R. B. (1978), "Refinements of the Nash Equilibrium Concept", *International Journal of Game Theory* **7**, 73—80. [254]

Myerson, R. B. (1980), "Conference Structures and Fair Allocation Rules", *International Journal of Game Theory* **9**, 169—182. [297]

Myerson, R. B. (1991), *Game Theory*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. [8, 275, 293]

Nash, J. F. (1950a), "Equilibrium Points in N-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **36**, 48—49. [29, 30, 51]

Nash, J. F. (1950b), "The Bargaining Problem", *Econometrica* 18, 155—162. [312]

Nash, J.F. (1951), "Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics* **54**, 286—295. [30, 51]

Neyman, A. (1985), "Bounded Complexity Justifies Cooperation in the Finitely Repeated Prisoners' Dilemma", *Economic Letters* **19**, 227—229. [175]

Nikaidô, H., and K. Isoda (1955), "Note on Noncooperative Convex Games", *Pacific Journal of Mathematics* **5**, 807—815. [30]

Osborne, M.J. (1990), "Signaling, Forward Induction, and Stability in Finitely Repeated Games", *Journal of Economic Theory* **50**, 22—36. [115]

Osborne, M.J., and A. Rubinstein (1990), *Bargaining and Markets*. San Diego: Academic Press. [129, 131, 236]

Owen, G. (1982), *Game Theory* (Second Edition). New York: Academic Press. [275]

Pearce, D.G. (1984), "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection", *Econometrica* **52**, 1029—1050. [64]

Pearce, D.G.(1992), "Repeated Games: Cooperation and Rationality", pp.132—174 in *Advances in Economic Theory*, Volume I (J.-J. Laffont, ed.), Cambridge: Cambridge University Press.[161]

Peleg, B.(1963a), "Bargaining Sets of Cooperative Games Without Side Payments", *Israel Journal of Mathematics* 1, 197—200.[298]

Peleg, B.(1963b), "Existence Theorem for the Bargaining Set $M_1^{(i)}$", *Bulletin of the American Mathematical Society* 69, 109—110.[297]

Peleg, B.(1967), "Existence Theorem for the Bargaining Set $M_1^{(i)}$", pp.53—56 in *Essays in Mathematical Economics* (M.Shubik, ed.), Princeton: Princeton University Press.[297]

Peleg, B. (1968), "On Weights of Constant-Sum Majority Games", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 16, 527—532.[297]

Peleg, B. (1992), "Axiomatizations of the Core", pp. 397—412 in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1(R.J.Aumann and S.Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland.[275]

Piccione, M. (1992), "Finite Automata Equilibria with Discounting", *Journal of Economic Theory* 56, 180—193.[175]

Piccione, M., and A.Rubinstein (1993), "Finite Automata Play a Repeated Extensive Game", *Journal of Economic Theory* 61, 160—168.[175]

Postlewaite, A., and R.W.Rosenthal (1974), "Disadvantageous Syndicates", *Journal of Economic Theory* 9, 324—326.[275]

Radner, R. (1980), "Collusive Behavior in Noncooperative Epsilon-Equilibria of Oligopolies with Long but Finite Lives", *Journal of Economic Theory* 22, 136—154.[115]

Radner, R. (1986), "Can Bounded Rationality Resolve the Prisoners' Dilemma?", pp.387—399 in *Contributions to Mathematical Economics* (W. Hildenbrand and A.Mas-Colell, eds.), Amsterdam: North-Holland.[115]

Raiffa, H. (1992), "Game Theory at the University of Michigan, 1948—1952", pp. 165—175 in *Toward a History of Game Theory* (E.R. Weintraub, ed.), Durham: Duke University Press.[30]

Rapoport, A. (1987), "Prisoner's Dilemma", pp. 973—976 in *The New Palgrave*, Volume 3 (J.Eatwell, M.Milgate, and P.Newman, eds.), London: Macmillan.[135]

Reny, P.J.(1992), "Backward Induction, Normal Form Perfection and

Explicable Equilibria", *Econometrica* **60**, 627—649. [115]

Reny, P. J. (1993), "Common Belief and the Theory of Games with Perfect Information", *Journal of Economic Theory* **59**, 257—274. [115]

Repullo, R. (1987), "A Simple Proof of Maskin's Theorem on Nash Implementation", *Social Choice and Welfare* **4**, 39—41. [195]

Robinson, J. (1951), "An Iterative Method of Solving a Game", *Annals of Mathematics* **54**, 296—301. [52]

Rockafellar, R. T. (1970), *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press. [263, 274]

Roemer, J. E. (1988), "Axiomatic Bargaining Theory on Economic Environments", *Journal of Economic Theory* **45**, 1—31. [312]

Rosenthal, R. W. (1979), "Sequences of Games with Varying Opponents", *Econometrica* **47**, 1353—1366. [51]

Rosenthal, R. W. (1981), "Games of Perfect Information, Predatory Pricing and the Chain-Store Paradox", *Journal of Economic Theory* **25**, 92—100. [115]

Roth, A. E. (1977), "Individual Rationality and Nash's Solution to the Bargaining Problem", *Mathematics of Operations Research* **2**, 64—65. [309, 312]

Roth, A. E. (1979), *Axiomatic Models of Bargaining*. Berlin: Springer-Verlag. [312]

Roth, A. E., and R. E. Verrecchia (1979), "The Shapley Value As Applied to Cost Allocation: A Reinterpretation", *Journal of Accounting Research* **17**, 295—303. [297]

Rubinstein, A. (1979), "Equilibrium in Supergames with the Overtaking Criterion", *Journal of Economic Theory* **21**, 1—9. [160]

Rubinstein, A. (1982), "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model", *Econometrica* **50**, 97—109. [131]

Rubinstein, A. (1986), "Finite Automata Play the Repeated Prisoner's Dilemma", *Journal of Economic Theory* **39**, 83—96. [175]

Rubinstein, A. (1989), "The Electronic Mail Game: Strategic Behavior Under 'Almost Common Knowledge'", *American Economic Review* **79**, 385—391. [85]

Rubinstein, A. (1991), "Comments on the Interpretation of Game The-

ory", *Econometrica* **59**, 909—924. [51, 115]

Rubinstein, A. (1994), "Equilibrium in Supergames", pp. 17—27 in *Essays in Game Theory* (N. Megiddo, ed.), New York: Springer-Verlag. [160]

Rubinstein, A. (1995), "On the Interpretation of Two Theoretical Models of Bargaining", pp. 120—130 in *Barriers to Conflict Resolution* (K. J. Arrow, R. H. Mnookin, L. Ross, A. Tversky, and R. B. Wilson, eds.), New York: Norton. [131]

Rubinstein, A., Z. Safra, and W. Thomson (1992), "On the Interpretation of the Nash Bargaining Solution and Its Extension to Non-Expected Utility Preferences", *Econometrica* 60, 1171—1186. [312]

Rubinstein, A., and A. Wolinsky (1994), "Rationalizable Conjectural Equilibrium: Between Nash and Rationalizability", *Games and Economic Behavior* **6**, 299—311. [64—65]

Samet, D. (1990), "Ignoring Ignorance and Agreeing to Disagree", *Journal of Economic Theory* **52**, 190—207. [85]

Satterthwaite, M. A. (1975), "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions", *Journal of Economic Theory* **10**, 187—217. [195]

Savage, L. J. (1972), *The Foundations of Statistics* (Second Revised Edition). New York: Dover. [5]

Scarf, H. E. (1967), "The Core of an *N* Person Game", *Econometrica* **35**, 50—69. [269, 275]

Schelling, T. C. (1960), *The Strategy of Conflict*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press. [8]

Schmeidler, D. (1969), "The Nucleolus of a Characteristic Function Game", *SIAM Journal on Applied Mathematics* **17**, 1163—1170. [297]

Schmeidler, D., and H. Sonnenschein (1978), "Two Proofs of the Gibbard-Satterthwaite Theorem on the Possibility of a Strategy-Proof Social Choice Function", pp. 227—234 in *Decision Theory and Social Ethics* (H. W. Gottinger and W. Leinfellner, eds.), Dordrecht: D. Reidel. [195]

Selten, R. (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit", *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* **121**, 301—324 and 667—689. [115]

Selten, R. (1975), "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games", *International Journal of Game Theory* **4**, 25—55. [254]

Selten, R. (1978), "The Chain Store Paradox", *Theory and Decision* **9**, 127—159. [115]

Sen, A. (1986), "Social Choice Theory", pp. 1073—1181 in *Handbook of Mathematical Economics*, Volume 3 (K. J. Arrow and M. D. Intriligator, eds.), Amsterdam: North-Holland. [182]

Shaked, A. (1994), "Opting Out: Bazaars versus 'Hi Tech' Markets", *Investigaciones Económicas* **18**, 421—432. [129]

Shaked, A., and J. Sutton (1984a), "Involuntary Unemployment as a Perfect Equilibrium in a Bargaining Model", *Econometrica* 52, 1351—1364. [131]

Shaked, A., and J. Sutton (1984b), "The Semi-Walrasian Economy", Discussion Paper 84/98 (Theoretical Economics), International Centre for Economics and Related Disciplines, London School of Economics. [131]

Shapley, L. S. (1953), "A Value for n-Person Games", pp. 307—317 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume II (Annals of Mathematics Studies, 28) (H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press. [297]

Shapley, L. S. (1959), "The Solutions of a Symmetric Market Game", pp. 145—162 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume IV (Annals of Mathematics Studies, 40) (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Princeton: Princeton University Press. [274, 275]

Shapley, L. S. (1964), "Some Topics in Two-Person Games", pp. 1—28 in *Advances in Game Theory* (Annals of Mathematics Studies, 52) (M. Dresher, L. S. Shapley, and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press. [52]

Shapley, L. S. (1967), "On Balanced Sets and Cores", *Naval Research Logistics Quarterly* **14**, 453—460. [274]

Shapley, L. S. (1969), "Utility Comparison and the Theory of Games", pp. 251—263 in *La Décision*, Paris: Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique. (Reprinted on pp. 307—319 of *The Shapley Value* (Alvin E. Roth, ed.), Cambridge: Cambridge University Press,

1988.)[298]

Shapley, L. S. (1971/72), "Cores of Convex Games", *International Journal of Game Theory* 1, 11—26. (See also p. 199.)[275, 297]

Shapley, L. S. (1973), "On Balanced Games without Side Payments", pp. 261—290 in *Mathematical Programming* (T. C. Hu and S. M. Robinson, eds.), New York: Academic Press. [269, 275]

Shapley, L. S., and M. Shubik (1953), "Solutions of N-Person Games with Ordinal Utilities", *Econometrica* **21**, 348—349. (Abstract of a paper presented at a conference.)[275]

Shapley, L. S., and M. Shubik (1967), "Ownership and the Production Function", *Quarterly Journal of Economics* **81**, 88—111. [275]

Shapley, L. S., and M. Shubik (1969a), "On Market Games", *Journal of Economic Theory* **1**, 9—25. [274]

Shapley, L. S., and M. Shubik (1969b), "On the Core of an Economic System with Externalities", *American Economic Review* **59**, 678—684. [275]

Shubik, M. (1959a), "Edgeworth Market Games", pp. 267—278 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅳ (Annals of Mathematics Studies, 40)(A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Princeton: Princeton University Press. [274, 275]

Shubik, M. (1959b), *Strategy and Market Structure*. New York: Wiley. [160]

Shubik, M. (1962), Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing", *Management Science* 8, 325—343. [297]

Shubik, M. (1982), *Game Theory in the Social Sciences*. Cambridge, Mass.: MIT Press. [8, 275]

Sorin, S. (1990), "Supergames", pp. 43—63 in *Game Theory and Applications* (T. Ichiishi, A. Neyman, and Y. Tauman, eds.), San Diego: Academic Press. [161]

Sorin, S. (1992), "Repeated Games with Complete Information", pp. 71—107 in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1 (R. J. Aumann and S. Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland. [161]

Spence, A. M. (1974), *Market Signaling*. Cambridge, Mass.: Har-

vard University Press. [237]

Spohn, W. (1982), "How to Make Sense of Game Theory", pp. 239—270 in *Philosophy of Economics* (W. Stegmüller, W. Balzer, and W. Spohn, eds.), Berlin: Springer-Verlag. [64, 84]

Ståhl, I. (1972), *Bargaining Theory*. Stockholm: Economics Research Institute at the Stockholm School of Economics. [131]

Thompson, F. B. (1952), "Equivalence of Games in Extensive Form", Research Memorandum RM-759, U.S. Air Force Project Rand, Rand Corporation, Santa Monica, California. (Reprinted on pp. 36—45 of *Classics in Game Theory* (Harold W. Kuhn, ed.), Princeton: Princeton University Press, 1997.) [209, 217]

Tversky, A., and D. Kahneman (1986), "Rational Choice and the Framing of Decisions", *Journal of Business* **59**, S251—S278. [209]

Van Damme, E. (1983), *Refinements of the Nash Equilibrium Concept* (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 219). Berlin: Springer-Verlag. [64]

Van Damme, E. (1989), "Stable Equilibria and Forward Induction", *Journal of Economic Theory* **48**, 476—496. [115]

Van Damme, E. (1991), *Stability and Perfection of Nash Equilibria* (Second Edition). Berlin: Springer-Verlag. [8, 52]

Van Damme, E. (1992), "Refinements of Nash Equilibrium", pp. 32—75 in *Advances in Economic Theory*, Volume I (J.-J. Laffont, ed.), Cambridge: Cambridge University Press. [254]

Van Damme, E., R. Selten, and E. Winter (1990), "Alternating Bid Bargaining with a Smallest Money Unit", *Games and Economic Behavior* **2**, 188—201. [131]

Varian, H. R. (1992), *Microeconomic Analysis* (Third Edition). New York: Norton. [275]

Vickrey, W. (1961), "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance* **16**, 8—37. [30]

Vives, X. (1990), "Nash Equilibrium with Strategic Complementarities", *Journal of Mathematical Economics* **19**, 305—321. [65]

von Neumann, J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", *Mathematische Annaln* 100, 295—320. (Translated as "On the Theory of Games

of Strategy", pp. 13—42 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume Ⅳ (Annale of Mathematics Studies, 40) (A. W. Tucker and R. D. Luce, eds.), Princeton University Press, Princeton, 1959.)[29, 30, 51]

von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*. New York: John Wiley and Sons. [5, 8, 9, 30, 114, 274, 279, 297]

Zamir, S. (1992), "Repeated Games of Incomplete Information: Zero-Sum", pp. 109—154 in *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Volume 1(R. J. Aumann and S. Hart, eds.), Amsterdam: North-Holland. [161]

Zemel, E. (1989), "Small Talk and Cooperation: A Note on Bounded Rationality", *Journal of Economic Theory* **49**, 1—9. [175]

Zermelo, E. (1913), "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels", pp. 501—504 in *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Volume Ⅱ (E. W. Hobson and A. E. H. Love, eds.), Cambridge: Cambridge University Press. [6, 100]

Zeuthen, F. (1930), *Problems of Monopoly and Economic Warfare*. London: George Routledge and Sons. [312]

术 语 索 引

A

B

C

G

H

I

M

N

O

P

Q

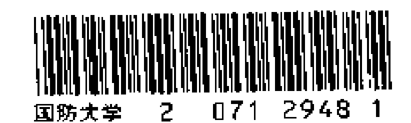
R

S

T

U

V



W

Z

后　记

我于1998年4月接受《当代经济学教科书译丛》编委罗涛先生的委托接下了本书的翻译工作。经过近一年的努力，书稿终于面世。由于博弈论(又称对策论)知识在我国并不普及，在经济学领域的应用更是欠缺，因此本书的很多译法都可能有争议。特别要说明的是，本书的主要术语和人名译法都参考了张维迎教授所著《博弈论与信息经济学》(上海三联出版社1996年版)。书中译法若有不妥之处欢迎广大读者批评指正。

承蒙本书原作者 Martin J. Osborne 和 Ariel Rubinstein 两位先生在百忙中审校了本书译稿并提出了很多好的建议。

最后，感谢为我翻译本书提供了帮助的所有人士，特别感谢我的妻子江林帮我誊印了全部书稿。

译　者

2000年3月于北大

图字:01-98-0190 号

图书在版编目(CIP)数据

博弈论教程/(加拿大)奥斯本(Osborne, M.J.),(美)鲁宾斯坦(Rubinstein, A.)著;魏玉根译. —北京:中国社会科学出版社,2000.4
(当代经济学教科书译丛/晏智杰主编)
书名原文:A Course in Game Theory
ISBN 7-5004-2486-8

Ⅰ.博… Ⅱ.①奥… ②鲁…③魏… Ⅲ.对策论-教材 Ⅳ.0225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 14421 号

责任编辑 魏海源
责任校对 林福国
封面设计 毛国宣
版式设计 郑以京

出版发行 中国社会科学出版社
(北京鼓楼西大街甲 158 号)
邮 编 100720
经 销 新华书店
印 刷 北京新魏印刷厂
版 次 2000 年 4 月第 1 版、第 1 次印刷

开 本 787×1092 毫米 1/16 印张 21.125 插页 2
字 数 359 千字
印 数 3 000 册
定 价 34.00 元